

РЕДУКЦИОННАЯ СИММЕТРИЯ ТЕНЗОРОВ (I)

REDUCTION SYMMETRY OF TENSORS (I)

Е. Ф. Кустов, Г. Стэчко, Т. К. Макетов

Московский энергетический институт*

(Поступила в редакцию 1-го марта 1980 г.)

In the first part of this paper, it is shown that the unitary groups of type $U[\gamma]$ (where γ is the main operator of tensors) characterize the tensor components. The reduction of unitary group representations (which are active for the tensor under consideration), according to composition series, (the orthogonal groups, the rotation groups and the point groups) classify completely the tensor components according to transformation and permutation symmetry.

PACS numbers: 02.20.+b, 61.50.Em

1. Введение

Большинство физических свойств кристаллов характеризуются тензорами различных рангов. Симметрия кристаллической системы или среды находит своё отражение в свойствах симметрии и внутренней структуре тензоров. При этом для характеристики внутренней структуры тензоров помимо точечной группы симметрии используют ортогональную группу для которой точечные группы являются её подгруппами. Такое рассмотрение приведено в работах [1—3]. Однако для полной классификации составляющих тензоров и определения внутренней структуры их подобное рассмотрение недостаточно и выявляет только качественные особенности строения, а не количественные соотношения.

В данной работе мы попытаемся использовать свойства редукционной симметрии тензоров, связанные с определёнными изменениями их свойств трансформационной симметрии при рассмотрении композиционного ряда вложенных друг в друга групп, где конечной группой является группа симметрии среды или кристалла. Для учёта свойств редукционной симметрии воспользуемся методом, развитым в [4, 5]. Если симметрия среды описывается группой G , то при рассмотрении компо-

* Address: Moskovskii Energeticheskii Institut, Krasnokazarmennaya 14, Moskva E-250, USSR.

зиционного ряда $G_n \supset \dots G_2 \supset G_1 \supset G$ можно выделить несколько составляющих функции распределения плотности или зарядов в кристалле:

$$\varrho(x, y, z) = \sum_{i=0}^n C_i \varrho_i(x, y, z). \quad (1)$$

Составляющие ϱ_i будут инвариантны не только относительно группы G , но и соответствующей группе композиционного ряда. Очевидно, что различные редукционные составляющие плотности будут давать различный отклик системы на внешние воздействия и будут отражаться во внутренней структуре тензоров.

Однако ортогональные группы или группы вращений не являются группами максимальной симметрии тензоров, подразумевая под этими группами группы, редукция которых одного или нескольких представлений порождает все составляющие тензоров. В работе [5] введены группы унитарных преобразований $U_{[\gamma]\gamma}$, где γ характеризует неприводимые представления точечных групп выделяя тем самым набор генераторов этой группы. Оказывается, что если γ это представление, $(\gamma)^n$ произведение которого определяет тензор n ранга, то группы $U_{[\gamma]\gamma}$ могут характеризовать тензоры этого типа как группы „максимальной симметрии“. Однако для того, чтобы определить представления группы U активные для классификации компонент тензора необходимо рассмотреть соотношения редукционной симметрии по точечной группе и группе перестановок индексов тензора.

2. Редукционная симметрия трансформационных свойств тензора

Структура трансформационных свойств тензора или структура симметрии направлений определяется свойствами редукционного ряда вложенных друг в друга групп, причём начальная группа ряда является ортогональная группа (группа вращений), а конечной группой — группа точечной симметрии кристалла. При таком подходе мы получаем полную схему классификации компонент тензора, сохранив при этом свойство инвариантности каждой компоненты не только относительно конечной группы, но и какой-нибудь группы редукционного ряда (или нескольких групп). Рассмотрим два редукционных ряда для кристаллов с симметрией D_4 и C_{4v} .

$$\begin{array}{ccc} O_3 & \supset & O_h \supset D_4 \\ O & \longleftarrow & A_{1g} \longleftarrow A_1 \\ 4, 6, 8, 9 \dots & \longleftarrow & \downarrow \\ 2, 4, 5, 6 \dots & \longleftarrow & E_{(g)} \longleftarrow \end{array} \quad \begin{array}{ccc} O_3 & \supset & O_h \supset C_{4v} \\ O & \longleftarrow & A_{1g} \longleftarrow A_1 \\ 4, 6, 8, 9 \dots & \longleftarrow & \downarrow \\ 2, 4, 5, 6 \dots & \longleftarrow & E_g \longleftarrow \\ 1, 3 (4), 5 & \longleftarrow & F_{1u} \longleftarrow \end{array} \quad (2)$$

Первые компоненты обоих рядов — это сферически симметричные составляющие, поскольку инвариантны относительно группы O_3 , вторые составляющие инвариантны относительно преобразования группы O_h — кубически симметричные компо-

ненты, третьи составляющие — тетрагонально симметричные. Однако для группы C_{4v} имеется ещё дополнительная тетрагональная составляющая, определяющая специфическое отличие группы C_{4v} от D_4 по редукционной симметрии.

Поскольку число и вид независимых компонент тензора определяется группой симметрии, то разложение плотности типа (2) приведёт к разделению различных компонент тензора в зависимости от инвариантности по группам редукционного ряда. В зависимости от ранга тензора выделяется набор компонент с представлениями группы O_3 не выше n . Для тензора 2-го ранга надо оставить компоненты 0, 1, 2 чётные относительно инверсии, для тензора 3-го ранга — 0, 1, 2, 3 нечётные относительно инверсии и т.д. Скалярные величины C_i будут характеризовать вклад составляющих различной редукционной симметрии и будут определяться свойствами среды. Однако в рамках редукционных рядов типа (2) мы получаем неполную информацию относительно составляющих тензоров, поскольку здесь не учитываются свойства перестановок индексов тензора. Учёт перестановочных свойств мы можем провести включая в рассмотрение унитарные группы.

3. Редукционная симметрия перестановочных свойств тензора

Для решения этого вопроса необходимо в группе унитарных преобразований выделить представления, которые были бы активны для классификации составляющих тензора. Это можно сделать используя соотношения Вейля для групп перестановок и унитарных групп. Произведение n величин типа γ характеризуется приводимым представлением унитарной группы U и распадается на неприводимые представления:

$$U = \sum_{\lambda} C_{\lambda} \{\lambda\}. \quad (3)$$

С другой стороны, это произведение образует представление P группы перестановок P_n , которое также распадается на совокупность неприводимых представлений: $P = \sum_{\lambda} n_{\lambda} [\lambda]$, при этом размерность $P[\lambda]$ определяет число C_{λ} в разложении (3).

Таким образом набор представлений группы перестановок выделяет активные представления унитарной группы. Конкретной тензор имеет симметрию P группы перестановок, которая в общем случае является подгруппой группы P_n . Для выделения нужных представлений группы P_n необходимо рассмотреть редукционные соотношения типа:

$$\begin{array}{c} P_n \supset P \\ \begin{array}{c} [\lambda_i] \leftarrow \\ [\lambda_j] \leftarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} [\lambda] \end{array} \right. \end{array} \quad (4)$$

Набор представлений $[\lambda_i]$, $[\lambda_j]$ будет характеризовать активные представления унитарных групп, или компоненты тензора с различной перестановочной симметрией.

Редукция представлений групп $U_{3F_{1u}} \supset O_{3F_{1u}} \supset O_h$

$U_{3F_{1u}}$ $\{\lambda\}$	$O_{3F_{1u}}$ $[\lambda]$	O_h Γ
$\{0\}$	$[0]$	A_{1g}
$\{1\}$	$[1]^*$	F_{1u}
$\{11\}$	$[1]$	F_{1g}
$\{2\}$	$[2]$ $[0]$	$(E, F_2)_g$ A_{1g}
$\{111\}$	$[0]^*$	A_{1u}
$\{21\}$	$[2]^*$ $[1]^*$	$(E, F_2)_u$ F_{1u}
$\{3\}$	$[3]^*$ $[1]^*$	$(A_2, F_1, F_2)_u$ F_{1u}
$\{211\}$	$[1]$	F_{1g}
$\{22\}$	$[2]$ $[0]$	$(E, F_2)_g$ A_{1g}
$\{31\}$	$[3]$ $[2]$ $[1]$	$(A_2, F_1, F_2)_g$ $(E, F_2)_g$ F_{1g}
$\{4\}$	$[4]$ $[2]$ $[0]$	$(A_1, E, F_1, F_2)_g$ $(E, F_2)_g$ A_{1g}
$\{221\}$	$[1]^*$	F_{1u}
$\{311\}$	$[2]^*$ $[0]^*$	$(E, F_2)_u$ A_{1u}
$\{32\}$	$[1]^*$ $[2]^*$ $[3]^*$	F_{1u} $(E, F_2)_u$ $(A_2, F_1, F_2)_u$
$\{41\}$	$[1]^*$ $[2]^*$ $[3]^*$ $[4]^*$	F_{1u} $(E, F_2)_u$ $(E, F_1, F_2)_u$ $(A_1, E, F_1, F_2)_u$

ТАБЛИЦА I (продолжение)

$U_{3F_{1u}}$ $\{\lambda\}$	$O_{3F_{1u}}$ $[\lambda]$	O_h Γ
$\{5\}$	[5] [3] [1]	$(E, 2F_1, F_2)_u$ $(A_2, F_1, F_2)_u$ F_{1u}
$\{222\}$	[0]	A_{1g}
$\{321\}$	[1] [2]	F_{1g} $(E, F_2)_g$
$\{411\}$	[1] [3]	F_{1g} $(A_2, F_1, F_2)_g$
$\{33\}$	[1] [3]	F_{1g} $(A_2, F_1, F_2)_g$
$\{42\}$	[0] [2] [3] [4]	A_{1g} $(2E, F_2)_g$ $(A_2, F_1, F_2)_g$ $(A_1, E, F_1, F_2)_g$
$\{51\}$	[1] [2] [3] [4] [5]	F_{1g} $(E, F_2)_g$ $(A_2, F_1, F_2)_g$ $(A_1, E, F_1, F_2)_g$ $(E, 2F_1, F_2)_g$
$\{6\}$	[0] [2] [4] [6]	A_{1g} $(E, F_2)_g$ $(A_1, E, F_1, F_2)_g$ $(A_1, A_2, E, F_1, 2F_2)_g$

Редуцируя соответствующее представление унитарной группы на ортогональную группу и точечные группы редукционного ряда типа (2), выделяются составляющие по свойствам трансформационной симметрии для каждой составляющей данной перестановочной симметрии. Таким образом, свойства редукционной симметрии среды и тензора определяют количество независимых компонент тензора для данной среды. Основные редукционные соотношения между группами U_3 , O_3 , O_h приведены в Таблице I. Для точечных групп, являющимися подгруппами группы O_h эти соотношения сохраняются с использованием редукционных соотношений, которые хорошо известны.

Если представление на котором строится тензор, скажем векторное представление, имеет несколько компонент в группе, то классификация производится с использованием интранзитивных групп. Например, для классификации тензоров

Редукция представлений групп $U_3 \supset U_2 \times U_1 \supset D_{6h} \times D_{6h} \supset D_{6h}$

U_3 $\{\lambda\}$	$U_2 \times U_1$ $\{\lambda_1, \lambda_2\}$	$D_{6h} \times D_{6h}$ Γ_1, Γ_2	D_{6h} Γ
$\{0\}$	$\{0, 0\}$	A_{1g}, A_{1g}	A_{1g}
$\{1\}$	$\{1, 0\}$ $\{0, 1\}$	E_{1u}, A_{1g} A_{1g}, A_{2u}	E_{1u} A_{2u}
$\{2\}$	$\{2, 0\}$ $\{1, 1\}$ $\{0, 2\}$	$A_{1g}, E_{2g}; A_{1g}$ E_{1g}, A_{2u} A_{1g}, A_{1g}	A_{1g}, E_{2g} E_{1g} A_{1g}
$\{11\}$	$\{11, 0\}$ $+ \{1, 1\}$	A_{2g}, A_{1g}	A_{2g}
$\{3\}$	$\{3, 0\}$ $\{2, 1\}$ $\{1, 2\}$ $\{0, 3\}$	$B_{1u}, B_{2u}, E_{1u}; A_{1g}$ $A_{1g}, E_{2g}; A_{2u}$ E_{1u}, A_{1g} A_{1g}, A_{2u}	B_{1u}, B_{2u}, E_{1u} A_{2u}, E_{2u} E_{1u} A_{2u}
$\{21\}$	$\{21, 0\}$ $+ \{2, 1\} + \{1, 2\}$	E_{1u}, A_{1g}	E_{1u}
$\{111\}$	$\{11, 1\}$	A_{2g}, A_{2u}	A_{1u}
$\{4\}$	$\{4, 0\}$ $\{3, 1\}$ $\{2, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{0, 4\}$	$A_{1g}, 2E_{2g}; A_{1g}$ $B_{1u}, B_{2u}, E_{1u}; A_{2u}$ $A_{1g}, E_{2g}; A_{1g}$ E_{2u}, A_{2u} A_{1g}, A_{1g}	$A_{1g}, 2E_{2g}$ B_{2g}, B_{1g}, E_{1g} A_{1g}, E_{2g} E_{2u} A_{1g}
$\{31\}$	$\{31, 0\}$ $\{21, 1\}$ $\{11, 2\}$ $+ \{3, 1\} + \{2, 2\} + \{1, 3\}$	$A_{2g}, E_{2g}; A_{1g}$ E_{1u}, A_{2u} A_{2g}, A_{1g}	A_{2g}, E_{2g} E_{1g} A_{2g}
$\{22\} = \{2\}$	$\{22, 0\}$ $+ \{21, 1\} + \{2, 2\}$	A_{1g}, A_{1g}	A_{1g}
$\{5\}$	$\{5, 0\}$ $\{4, 1\}$ $\{3, 2\}$ $\{2, 3\}$ $\{1, 4\}$ $\{0, 5\}$	$B_{1u}, B_{2u}, 2E_{1u}, A_{1g}$ $A_{1g}, 2E_{2g}, A_{2u}$ $B_{1u}, B_{2u}, E_{1u}, A_{1g}$ A_{1g}, E_{2g}, A_{2u} E_{1u}, A_{2g} A_{1g}, A_{2u}	$B_{1u}, B_{2u}, 2E_{1u}$ $A_{2u}, 2E_{2u}$ B_{1u}, B_{2u}, E_{1u} A_{2u}, E_{2u} E_{1u} A_{2u}

ТАБЛИЦА II (продолжение)

U_3 $\{\lambda\}$	$U_2 \times U_1$ $\{\lambda_1, \lambda_2\}$	$D_{6h} \times D_{6h}$ Γ_1, Γ_2	D_{6h} Γ
{41}	{41, 0} {31, 1} {21, 2} {11, 3} + {4, 1} + {3, 2} + {1, 4} + {2, 3}	$B_{1u}, B_{2u}, E_{1u}, A_{1g}$ A_{2g}, E_{2g}, A_{2u} E_{1u}, A_{1g} A_{2g}, A_{2u}	B_{1u}, B_{2u}, E_{1u} A_{1u}, E_{2u} E_{1u} A_{1u}
{6}	{6, 0} {5, 1} {4, 2} {3, 3} {2, 4} {1, 5} {0, 6}	$2A_{1g}, A_{2g}, 2E_{2g}; A_{1g}$ $B_{1u}, B_{2u}, 2E_{1u}; A_{2u}$ $A_{1g}, 2E_{2g}; A_{1g}$ $B_{1u}, B_{2u}, E_{1u}; A_{2u}$ $A_{1g}, E_{2g}; A_{1g}$ E_{1u}, A_{2u} A_{1g}, A_{1g}	$2A_{1g}, 2A_{2g}, E_{2g}$ $B_{1g}, B_{2g}, 2E_{1g}$ $A_{1g}, 2E_{2g}$ B_{1g}, B_{2g}, E_{1g} A_{1g}, E_{2g} E_{1g} A_{1g}
{51}	{51, 0} {41, 1} {31, 2} {21, 3} {11, 4} + {5, 1} + {4, 2} + {3, 3} + {2, 4} + {1, 5}	$A_{2g}, 2E_{2g}; A_{1g}$ $B_{1u}, B_{2u}, E_{1u}; A_{2u}$ $A_{2g}, E_{2g}; A_{1g}$ E_{1u}, A_{2u} A_{2g}, A_{1g}	$A_{2g}, 2E_{2g}$ B_{1g}, B_{2g}, E_{1g} A_{2g}, E_{2g} E_{1g} A_{2g}
{42}	{42, 0} {32, 1} {22, 2} + {41, 1} + {4, 2} + {3, 3} + {2, 4} + {21, 3} + {31, 2}	$A_{1g}, E_{2g}; A_{1g}$ E_{1u}, A_{2u} A_{1g}, A_{1g}	A_{1g}, E_{2g} E_{1g} A_{1g}

$\{211\} = \{1\}$ u на g $\{33\} = \{3\}$ u на g
 $\{32\} = \{31\}$ g на u $\{321\} = \{21\}$ u на g
 $\{221\} = \{11\}$ g на u $\{222\} = \{0\}$ g на u
 $\{311\} = \{2\}$ g на u

группы D_{6h} рассматривается следующий композиционный ряд: $U_3 \supset U_2 \times U_1 \supset D_{6h}$.
 Редукция представлений группы U_3 на $U_2 \times U_1$ проводится таким образом, чтобы
 внешнее произведение представлений групп $U_2 \times U_1$ давало представление группы
 U_3 . Например представление $\{31\}$ редуцируется: $\{31\} = \{3,1\} + \{1,3\} + \{31,0\} +$
 $+ \{2,2\} + \{21,1\} + \{11,2\}$. Редукция представлений группы U_3 на $U_2 \times U_1$ и D_{6h} при-
 ведена в Таблице II. Для сокращения таблицы представления, которые генеалогиче-
 ски повторяются в тензорах меньшего ранга, выписаны сокращённо. Например,
 компоненты тензора шестого ранга типа $\{33\}$ генеалогически связаны с компонен-

Представления групп O_h и D_{6h} , активные для классификации составляющих тензоров точечных групп
O

Кубическая сингония

$\bar{4}3m$	T_d	A_{1g}, A_{2u}
432	O	A_{1g}, A_{2u}
$m\bar{3}$	T_h	A_{1g}, A_{2u}
23	T	$A_{1g}, A_{2g}, A_{1u}, A_{2u}$

Тетрагональная сингония

$4/m\bar{m}m$	D_{4h}	$A_{1g}, E_g(\theta)$
$4mm$	C_{4v}	$A_{1g}, E_g(\theta), F_{1u}$
422	D_4	$A_{1g}, E_g(\theta), A_{1u}, E_u(\theta)$
$\bar{4}2m$	D_{2d}	$(T_d), E_g(\theta), E_u(\theta)$
$\bar{4}$	S_4	$(D_{2d}), F_{1g}, F_{2u}$
$4/m$	C_{4h}	$A_{1g}, E_g(\theta), F_{1g}$
4	C_4	$(C_{4v}), A_{1u}, E_u(\theta), F_{1u}$

Ромбическая сингония

222	D_2	$(D_4), A_{2g}, E_g(\epsilon), A_{2u}, E_u(\epsilon)$
$mm2$	C_{2v}	$(C_{4v}), F_{2g}, F_{2u}$
mmm	D_{2h}	$(D_{4h}), A_{2g}, E_g(\epsilon)$

Моноклиная сингония

$2/m$	C_{2h}	$A_{1g}, E_g(\epsilon), F_{1g}, 2F_{2g}$
2	C_2	$(C_{2h}), A_{1u}, E_u(\epsilon), F_{1u}, 2F_{2u}$
m	C	$(C_{4v}), E_g(\epsilon), F_{1g}, F_{2g}, F_{1u}, 2F_{2u}$

Гексагональная сингония

$\bar{6}m2$	D_{3h}	A_{1g}, B_{1u}
$6mm$	C_{6v}	A_{1g}, A_{2u}
622	D_6	A_{1g}, A_{1u}
$6/m$	C_{6h}	A_{1g}, A_{2u}
$\bar{6}$	C_{3h}	$(D_{3h}), A_{2g}, B_{1u}$
6	C_6	$(C_{6h}), A_{1u}, A_{2u}$

Тригональная сингония

$\bar{3}m$	D_{3d}	A_{1g}, B_{1g}
32	D_3	$(D_6), B_{1g}, B_{1u}$
$3m$	C_{3v}	$(C_{6v}), B_{1g}, B_{2u}$
$\bar{3}$	C_{3i}	$(C_{6h}), B_{1g}, B_{2g}$
3	C_3	$(C_6), B_{1g}, B_{2g}$

Ромбическая сингония

222	D_2	$(D_6), E_{2g}, E_{2u}$
$mm2$	C_{2v}	$A_{1g}, E_{2g}, B_{1u}, E_{1u}$
mmm	D_{2h}	A_{1g}, E_{2g}

Моноклиная сингония

$2/m$	C_{2h}	$A_{1g}, B_{1g}, E_{1g}, E_{2g}$
2	C_2	$(D_{3h}), B_{2g}, E_{1g}, E_{2g}, A_{1u}, E_{1u}, E_{2u}$
m	C	$(D_{3h}), B_{1g}, E_{1g}, E_{2g}, A_{2u}, E_{1u}, E_{2u}$

тами тензора третьего ранга типа $\{3\}$, поскольку схема Юнга может быть достроена:

Вследствии этого можно записать: $\{33\} = \{3\} \cdot \{11\}$, поскольку при редукции этих представлений на группу O_h , D_{6h} представление $\{11\}$ даёт представление псевдоскаляра — A_{1u} . то все представления группы O_h , D_{6h} для разложения представления $\{33\}$ получаются из представления $\{3\}$ только с заменой индекса u на g .

Таблицы I, II содержат полную информацию относительно компонент любых тензоров с рангом не выше шести. Аналогичные таблицы можно составить для тензоров более высоких рангов. Число компонент тензоров группы O_h или D_{6h} получается для каждого представления группы O_h или D_{6h} в зависимости от числа представлений типа A_{1g} , получающиеся в разложении. Для подгрупп этих групп необходимо рассмотреть редукцию представлений групп O_h , D_{6h} на их подгруппы и подсчитать число единичных представлений на конечной группе. В Таблице III приведены представления групп O_h и D_{6h} , редукция которых на их подгруппы даёт единичные представления на этих подгруппах. С помощью Таблиц I, II, III определяется число и тип компонент тензоров различных рангов. Например для группы C_{4v} из Таблицы III определяется что в этой группе имеется одна кубическая (A_{1g}) и две тетрагональные (E_g , F_{1u}) компоненты. Для тензора второго ранга будет иметься одна сферически симметричная компонента, симметричная относительно перестановок индексов ($[2]$, $[0]$ A_{1g}) и одна тетрагональная ($[2]$, $[2]$ E_g). Для тензоров третьего ранга имеется две компоненты симметричные относительно перестановок индексов ($[3]$, $[1]$ F_{1u}), ($[3]$, $[3]$ F_{1u}) и одна компонента ($[21]$, $[1]$ F_{1u}) симметричная относительно перестановок двух индексов.

4. Использование плетизмов для классификации компонент тензоров

Определение представлений унитарных групп $U_{[n]}$, которые являются активными для классификации компонент тензора по свойствам перестановочной симметрии используя редукционные ряды типа (4) представляет собой довольно сложную процедуру. Поэтому во многих случаях можно облегчить эту процедуру используя операцию плетизма, введенную Литлвудом [6]. Допустим, что необходимо найти представления группы $U_{[n]}$ для тензора четвёртого ранга симметричного относительно перестановок двух пар индексов: $[[T^2]^2]$ и симметричного относительно перестановок этих пар. Этот тензор можно составить из тензоров второго ранга, симметричных относительно перестановок индексов, т.е. тензоров, которые преобразуются по представлению $\{2\}$. С другой стороны, результирующий тензор четвёртого ранга должен быть симметричен относительно перестановок этих двух тензоров, т.е. в их произведении нужно выделить представления преобразующиеся по пред-

ставлению $\{2\}$. Эти представления можно сразу получить вычисляя плетизм следующего вида:

$$\{2\} \otimes \{2\} = \{4\} + \{22\}. \quad (5)$$

Представления, появляющиеся в правой части (5) являются теми представлениями, которые характеризуют тензор этого типа. Для тензора $[(T^2)^2]$ исходные тензоры второго ранга преобразуются по сумме представлений $\{2\} + \{11\}$, а результирующий тензор должен быть симметричен относительно перестановок этих тензоров, т.е. опять в произведениях нужно выделить симметризованные произведения типа $\{2\}$. Тогда представления всего тензора будут соответствовать представлениям, появляющимся в разложении плетизма:

$$(\{2\} + \{11\}) \otimes \{2\} = \{4\} + 2\{22\} + \{31\} + \{211\}. \quad (6)$$

При вычислении плетизмов этого типа необходимо пользоваться правилом составления плетизма для суммы произведений. Тензор шестого ранга типа $[(T^2)^3]$ определяются компонентами, появляющимися в разложении плетизма:

$$(\{2\} + \{11\}) \otimes \{3\} = \{6\} + 2\{42\} + 2\{222\} + \{51\} + \{411\} + 2\{321\}. \quad (7)$$

Операции плетизма очень удобны для определения компонент тензоров высоких рангов когда другие методы определения становятся очень громоздкими. Но кроме того здесь очень просто можно получать результаты такого вида. Тензор шестого ранга симметричный относительно перестановок индексов в паре и пар индексов характеризуется представлениями появляющимися в разложении плетизма $[[T^2]^3]$:

$$\{2\} \otimes \{3\} = \{6\} + \{42\}. \quad (8)$$

Тензор антисимметричный относительно перестановок индексов в паре типа $[[T^2]^3]$ характеризуется сопряжённым плетизмом и имеет представления сопряжённые представлениям (8). Отсюда видно, что в трёхмерном пространстве таких представлений быть не может. Следовательно тензоров такого типа не должно быть в трёхмерном пространстве (в наиболее общем случае — тензоров типа $[[T^2]^n]$, $n > 2$). Число компонент изотропного симметричного тензора или тензора кубических групп можно рассчитывать аналитически, употребляя общую формулу для плетизма $[[T^2]^n]$:

$$\{2\} \otimes \{n\} = \{2n\} + \{2n-2, 2\} + \{2n-4, 4\} + \dots \quad (9)$$

Если r — ранг тензора, а $n = \frac{r}{2}$ и n — целое, то в разложении (9) будет иметься

$q = \frac{n+1}{2}$ или $\frac{n+2}{2}$ слагаемых и соответственно будет компонент изотропного тен-

зора $q = \frac{r+2}{4}$, $q = \frac{r+4}{4}$, отсюда общая формула будет

$$q_0 = \frac{r+3 \pm 1}{4}. \quad (10)$$

ТАБЛИЦА IV

Классификация компонентов тензоров по представлениям унитарных групп

Тип тензора	Плетизм или представление	Представление группы U_3	Размерность	Число компон. в $O(R_3)$	Число компон. в O_h
$[T^2]$	$\{1\} \otimes \{2\}$	$\{2\}$	6	1	0
$\{T^2\}$	$\{1\} \otimes \{11\}$	$\{11\}$	3	0	0
T^2	$\{1\} \otimes (\{2\} + \{11\})$	$\{2\} + \{11\}$	9	1	0
$[T^3]$	$\{1\} \otimes \{3\}$	$\{3\}$	10	0	0
$\{T^3\}$	$\{1\} \otimes \{111\}$	$\{111\}$	1	0 (1)	0
$[T^2]T$	$\{1\} \otimes (\{21\} + \{3\})$	$\{21\} + \{3\}$	18	0	0
$\{T^2\}T$	$\{1\} \otimes (\{21\} + \{111\})$	$\{21\} + \{111\}$	9	0 (1)	0
T^3	$\{1\} \otimes (\{3\} + \{21\} + \{111\})$	$\{3\} + \{21\} + \{111\}$	27	0 (1)	0
$[T^4]$	$\{1\} \otimes \{4\}$	$\{4\}$	15	1	1
$[T^3]T$	$\{1\} \otimes (\{31\} + \{4\})$	$\{31\} + \{4\}$	30	1	1
$[[T^2]^2]$	$\{2\} \otimes \{2\}$	$\{4\} + \{22\}$	21	2	1
$[T^2]^2$	$\{2\} \otimes (\{2\} + \{11\})$	$\{4\} + \{22\} + \{31\}$	36	2	1
$[(T^2)^2]$	$(\{2\} + \{11\}) \otimes \{2\}$	$\{4\} + 2\{22\} + \{31\} + \{211\}$	45	3	1
$[\{T^2\}^2]$	$\{11\} \otimes \{2\}$	$\{22\}$	6	1	0
$[T^2]T^2$	$\{2\} \otimes (\{2\} + \{11\})$	$\{4\} + 2\{31\} + \{22\} + \{211\}$	54	2	1
T^4	$(\{2\} + \{11\}) \otimes (\{2\} + \{11\})$	$\{4\} + 2\{22\} + 3\{33\} + 3\{211\}$	81	3 (2)	1
$[[T^2]^2]T$	$(\{4\} + \{22\}) \otimes \{1\}$	$\{41\} + \{5\} + \{32\} + \{221\}$	63	0	0
$[T^3][T^2]$	$\{3\} \cdot \{2\}$	$\{5\} + \{41\} + \{32\}$	60	0	0
$[T^3]\{T^2\}$	$\{3\} \cdot \{11\}$	$\{41\} + \{311\}$	30	0 (1)	0
$\{T^3\}[T^2]$	$\{111\} \cdot \{2\}$	$\{311\}$	6	0 (1)	0
$\{T^3\}\{T^2\}$	$\{111\} \cdot \{11\}$	$\{221\}$	3	0	0
$[T^4]T$	$\{4\} \cdot \{1\}$	$\{5\} + \{41\}$	45	0	0
$[T^3]T^2$	$(\{31\} + \{4\}) \cdot \{1\}$	$\{5\} + 2\{41\} + \{32\} + \{311\}$	90	0 (1)	0
$[T^2]^2T$	$(\{4\} + \{22\} + \{31\}) \cdot \{1\}$	$\{5\} + 3\{41\} + 2\{32\} + \{221\} + \{311\}$	108	0 (1)	0
$[(T^2)^2]T$	$(\{4\} + 2\{22\} + \{31\} + \{211\}) \cdot \{1\}$	$\{5\} + 2\{41\} + 3\{32\} + 3\{221\} + \{311\}$	135	0 (2)	0
$[\{T^2\}^2]T$	$\{22\} \cdot \{1\}$	$\{32\} + \{221\}$	18	0	0
T^5	$T^4 \cdot \{1\}$	$\{5\} + 4\{41\} + 5\{32\} + 6\{311\} + 5\{221\}$	243	0 (6)	0
$[T^2]T^3$	$\{2\} \cdot (\{3\} + \{21\} + \{111\})$	$\{5\} + 2\{41\} + 2\{32\} + \{221\} + \{311\}$	108	0	0
$[[T^2]^3]$	$\{2\} \cdot \{3\}$	$\{6\} + \{42\}$	55	2	3
$[\{T^2\}^3]$	$\{11\} \cdot \{3\}$	—	—	—	—
$[(T^2)^3]$	$(\{2\} + \{11\}) \otimes \{3\}$	$\{6\} + 2\{42\} + 2\{222\} + \{51\} + \{411\} + 2\{321\}$	145	5	4
$[T^4][T^2]$	$\{4\} \cdot \{2\}$	$\{6\} + \{51\} + \{42\}$	90	2	3
$[T^3][T^3]$	$\{3\} \cdot \{3\}$	$\{6\} + \{51\} + \{42\} + \{33\}$	100	2	3
$\{T^3\}\{T^3\}$	$\{111\} \cdot \{111\}$	$\{222\}$	1	1	0
$[T^3]\{T^3\}$	$\{3\} \cdot \{111\}$	$\{411\}$	10	0	0
$[[T^3]^2]$	$\{3\} \otimes \{2\}$	$\{6\} + \{42\}$	55	2	3
T^6	$(\{2\} + \{11\}) \otimes (\{3\} + \{21\} + \{111\})$	$\{6\} + 5\{51\} + 9\{42\} + 10\{411\} + 5\{33\} + 16\{231\} + 5\{222\}$	729	15	11

Для кристаллов кубической сингонии с симметрией группы O число компонент таких тензоров тоже можно получить в аналитическом выражении используя соответствующие соотношения для редукции унитарной группы на ортогональную группу и последнюю на группу O_h . Для ранга тензора $r < 12$:

$$q_k = \frac{(r+3 \pm 1)(3r+1 \mp 1)}{32}$$

$$r = 12 \quad q_k = \frac{(r+3 \pm 1)(3r+1 \mp 1) + 32}{32},$$

$$r > 12 \quad q_k = \frac{(r+3 \pm 1)(3r+1 \mp 1) + 16(r-12)}{32}. \quad (11)$$

Следует отметить, что в этих формулах мы получаем число компонент действительно различных, поскольку в разложении плетизма (10) не появляются повторяющиеся представления унитарной группы. Во многих других случаях, приведённых в Таблице IV, дано общее число компонент, учитывая повторяющиеся представления. В реальном случае повторяющиеся представления неразличаются и поэтому число компонент фактически меньше. Например скалярные представления группы O_3 дают представления группы $U_{[r]}$ только с чётными разбиениями, когда каждое число обозначающее представление является чётным. Поэтому только такие представления группы $U_{[r]}$ определяют число компонент тензора. Если такие представления появляются в разложении плетизма несколько раз, то такие компоненты в рамках рассматриваемого редукционного ряда неразличимы на эксперименте и число компонент, характеризующих тензор сокращается. Например в Таблице IV для тензора T^4 в разложении плетизма получаются следующие компоненты, которые дают скалярное представление групп $O_3 : \{4\}, 2\{22\}$ и число компонент должно быть 3, однако реально число компонент этого тензора будет 2, поскольку две компоненты от двух представлений $\{22\}$ неразличимы. Это показано в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. И. Седов, В. В. Лохин, *ДАН СССР* **149**, 796 (1963).
- [2] Ю. И. Сиротин, *Кристаллография* **5**, 171 (1960); **6**, 331 (1961).
- [3] Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, *Основы кристаллофизики*, Наука, Москва 1979.
- [4] Е. Ф. Кустов, *Кристаллография* **4**, 701 (1974).
- [5] E. F. Kustov, *Phys. Status Solidi* (b) **69**, 79 (1975); **71**, 449 (1975); **81**, 421 (1977); **91**, 43 (1979).
- [6] D. E. Littwood, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **239**, 305 (1944).