Vol. A58 (1980) ACTA PHYSICA POLONICA No 6

# О ТЕМПЕРАТУРЕ ПУАССОНОВСКОГО ПОЛЯ

## ON THE POISSON FIELD TEMPERATURE

В. Я. Анисимов*

(*Поступила в редакцию 20-го мая 1980 г.*)

It is shown that the Poisson field temperature is positive and equal to the temperature of the Gaussian field of small intensity.

PACS numbers: 05.90.+m

Понятие температуры может быть обобщено на неравновесные одномодовые поля. Основанием для этого может служить соотношение [1]

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{h\omega}\frac{\partial S}{\partial\langle n\rangle}, \tag{1}$$

где $S$ — инвариантная квантовая энтропия поля, равная $\mathrm{Sp}\{\hat{\varrho}\ln\hat{\varrho}\}$, $\langle n\rangle$ — среднее число фотонов в поле, $\omega$ — круговая частота, а $\hat{\varrho}$ — оператор плотности рассматриваемого поля, $k$ — постоянная Больцмана. Хотя таким образом определенная температура сохраняет одно из основных своих свойств, а именно, независимо от вида операторов плотности, описывающих каждое из двух находящихся в тепловом контакте электромагнитных полей, самопроизвольная передача энергии возможна лишь от поля с большей температурой, определяемой равенством (1), она уже не обязательно будет положительной для всех полей. Обычно наличие отрицательных температур связывают с инверсной заселенностью поля [2].

Цель нашей работы показать на примере пуассоновского поля, что наличие инверсной заселенности не обязательно приводит к отрицательным температурам.

Действительно несложно убедиться, что у пуфссоновского поля, определяемого оператором плотности с матричными элементами $\varrho_n$ в пространстве чисел заполнения равными

$$\varrho_n \equiv \langle n|\hat{\varrho}|n\rangle = \frac{\langle n\rangle^n}{n!}e^{-\langle n\rangle} \tag{2}$$

* Address: Minsk 220092, Ya. Mavra 18, kv. 78, USSR.

где $\langle n \rangle$ — среднее число фотонов в поле, наибольшими будут матричные элементы $\varrho_N$ и $\varrho_{N+1}$, где $N = E(\langle n \rangle)$ — целая часть от $\langle n \rangle$, а, следовательно, для $\langle n \rangle \geqslant 1$ пуассоновское поле будет полем с инверсной заселенностью. Производная от энтропии по среднему числу фотонов в поле может быть представлена в виде

$$\frac{\partial S}{\partial \langle n \rangle} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \varrho_n}{\partial \langle n \rangle} - \sum_{n=0}^{\infty} \ln \varrho_n \frac{\partial \varrho_n}{\partial \langle n \rangle}. \tag{3}$$

Вследствие нормировки первая сумма в правой части выражения (3) равна нулю, а вторая после подстановки в нее производных $\dfrac{\partial \varrho_n}{\partial \langle n \rangle}$, которые для пуассоновского поля равны

$$\frac{\partial \varrho_n}{\partial \langle n \rangle} = \varrho_{n-1} - \varrho_n \tag{4}$$

и несложных преобразований принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial \langle n \rangle} = \frac{1}{\langle n \rangle} \{\langle n \ln n \rangle - \langle n \rangle \ln \langle n \rangle\}, \tag{5}$$

где посредством $\langle n \ln n \rangle$ обозначена сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \ln n}{n!} e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(n-1)!} e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^n. \tag{6}$$

Выражение (5) на основании неравенства, содержащегося в [3] положительно, а следовательно, и температура пуассоновского поля, определяемая формулой (1), будет положительной, что и требовалось доказать.

В заключение рассмотрим зависимость температуры пуассоновского поля от среднего числа фотонов. Поскольку просуммировать в общем виде выражение (5) невозможно, ограничимся рассмотрением двух, практически важных, предельных случаев — бесконечно большой и бесконечно малой интенсивности поля.

1. Слабое поле, т.е. $\langle n \rangle \ll 1$ тогда, ограничиваясь линейным приближением по $\langle n \rangle$, для температуры пуассоновского поля получим

$$T = -\frac{k}{\hbar\omega} \frac{1}{\ln \langle n \rangle}, \tag{7}$$

т.е. температура пуассоновского поля, при уменьшении $\langle n \rangle$ стремится к нулю. Сравнивая температуру пуассоновского поля, задаваемую выражением (7), с температурой гауссовского поля [2], отметим, что они совпадают, т.е. температура гауссовского поля в пределе малых средних чисел фотонов равна температуре пуассоновского поля. Этот результат, как несложно убедиться, справедлив и для любого стационарного поля.

2. Случай больших интенсивностей т.е. $\langle n\rangle \gg 1$, в этом случае, заменив в выражении (6) индекс суммирования $n$ на $\kappa+1$, и подставив полученную сумму в (5), после несложных преобразований получим для производной от энтропии пуассоновского поля по среднему числу фотонов

$$\frac{\partial S}{\partial\langle n\rangle} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\langle n\rangle^{\kappa}}{\kappa!} e^{-\langle n\rangle} \ln \frac{\kappa+1}{\langle n\rangle}. \tag{8}$$

Разлагая в (8) $\ln \frac{\kappa+1}{\langle n\rangle}$ в ряд по степеням $\frac{\kappa+1-\langle n\rangle}{\langle n\rangle}$, и ограничиваясь первыми двумя членами разложения получим для температуры пуассоновского поля

$$T_{\text{пуасс}} = \frac{2k\langle n\rangle}{h\omega} + 0\left(\frac{1}{\langle n\rangle}\right) \tag{9}$$

а, следовательно, $T_{\text{пуасс}} = 2T_{\text{гаусс}}$ для $\langle n\rangle \to \infty$, где $T_{\text{гаусс}} = \frac{k\langle n\rangle}{h\omega}$ — температура гауссовского поля для $\langle n\rangle \gg 1$. Выражение (9), несколько иным способом, было получено в [1].

## ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Дерюгин, В. Н. Курашов, *Извест. ВУЗОВ, Физика* № 6, 7 (1972).
[2] R. S. Ingarden, *Bull. Acad. Pol. Sci.* **11**, No 8, 541 (1963).
[3] Г. Г. Харди, Д. Е. Литльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ 1948.