Vol. A57 (1980) *ACTA PHYSICA POLONICA* No 5

КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ

GAUGE SYMMETRY AND PHASE TRANSITIONS IN THE RANDOM SPIN SYSTEMS

В. А. Загребнов, В. Б. Приезжев

Лаборатория теоретической физики, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна*

(Поступила в редакцию 18-го августа 1979 г.)

The lattice gauge field with local group Z_2 is shown to be equivalent to the ferromagnetic Ising model with "unfrozen"-antiferromagnetic-bond impurities interacting on plaquettes. The influence of frustration effect created by the impurities on a phase transition in this model is considered.

1. Введение

В настоящее время в теории поля и элементарных частиц большие надежды связываются с исследованием хромодинамики, лагранжиан которой для компактной калибровочной группы G имеет вид:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{g^2}\,\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+\sum_{j=1}^{f}\bar{\psi}_j(i\gamma^\mu D_\mu - m_j)\psi_j. \tag{1}$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, а $A_\mu(x)$ — поле Янга-Миллса со значениями в алгебре Ли группы G, $\psi_i(x)$ — фермионное поле кварков с массой m_i и $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$ ковариантная производная (о деталях см. [1–4]). Привлекательной чертой теории, основанной на лагранжиане (1) является, во-первых, асимптотическая свобода, т.е. убывание взаимодействия кварков на малых расстояниях (см., например, [2–5]). Во-вторых, существуют веские аргументы в пользу „конфайнмента", т.е. отсутствия в теории свободных кварков (барионная фаза) при достаточно большой величине константы связи g^2 (см. [2] и [6–8]). Теория с лагранжианом (1) довольно сложна, поэтому последнее свойство удалось проверить лишь после ряда упрощений:

(*i*) перехода от пространства $\boldsymbol{R}^d$ к решетке $\boldsymbol{Z}^d$ (калибровочные поля на решетке [6–10]);

(*ii*) перехода от калибровочных групп $SU(3)$, $SU(4)$ и др. к более простым абелевым группам, например Z_n — центру группы $SU(n)$ [9–11].

* Address: Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, USSR.

2. *Калибровочное поле на решетке*

После первого шага (i) калибровочно инвариантное (относительно преобразования $C_{x,\mu} \to C'_{x,\mu} = U_{x,\mu} C_{x,\mu} U^{-1}_{x+a,\mu}$) евклидово действие для поля Янга-Миллса принимает вид:

$$S_{\text{Y-M}}[C] = \frac{a^{d-4}}{2g^2} \sum_{P} \operatorname{Tr} (C_{x,\mu} C_{x+a,\nu} C^{-1}_{x+a,\mu} C^{-1}_{x,\nu} + \text{h.c.}) \tag{2}$$

где a — параметр решетки Z^d, а поле $C_{x,\mu} = \exp (igaA_\mu(x))$ сосредоточению на ребрах решетки Z^d. Суммирование в выражении (2) проводится по всем плакетам P — площадкам, ограниченным наименьшими замкнутыми контурами, проходящими по ребрам решетки. Соответствующим образом переписывается и часть действия, отвечающая взаимодействию кварков на решетке с полем $C_{x,\mu}$ (см., например, [6–10]).

Наиболее простая модель хромодинамики на решетке связана с калибровочной группой Z_2 [9, 10]. Соответствующее действие имеет вид:

$$S_{\gamma,\delta}[C, \sigma] = \gamma \sum_{P} C_{ij} C_{jk} C_{kl} C_{li} + \delta \sum_{(ij)} \sigma_i C_{ij} \sigma_j, \tag{3}$$

где (ij) обозначает суммирование по ребрам решетки Z^d, $[ijkl]$ — индексы узлов на плакете P. Калибровочное поле C_{ij} принимает значения ± 1, а второй член в выражении (3) моделирует его взаимодействие с „кварками“, которым сопоставляется поле $\{\sigma_i = \pm 1\}$, сосредоточенное в узлах решетки Z^d. Ожидается, что действие (3) должно описывать переход из кварковой фазы в барионную фазу („конфайнмент“). Поэтому основными объектами исследования являются континуальный интеграл по полям C и σ:

$$Z[S_{\gamma,\delta}] = \int \mathscr{D}C \int \mathscr{D}\, \sigma e^{S_{\gamma,\delta}[C,\sigma]} \tag{4}$$

и соответствующие средние с функцией распределения

$$\varrho_{\gamma,\delta}[C, \sigma] = (Z[S_{\gamma,\delta}])^{-1} e^{S_{\gamma,\delta}[C,\sigma]}, \tag{5}$$

особенности поведения которых, при изменении параметров γ и δ интерпретируются в духе теории фазовых переходов [6–11].

Выражение (4) с точностью до постоянного множителя переписывается в виде статистической суммы

$$Z[H_{\delta,\gamma}] = \sum_{\{\sigma = \pm 1\}} \sum_{\{C = \pm 1\}} e^{-H_{\delta,\gamma}[\sigma,C]}, \tag{6}$$

где

$$H_{\delta,\gamma} = -\delta \sum_{(ij)} \sigma_i C_{ij} \sigma_j - \gamma \sum_{P} C_{ij} C_{jk} C_{kl} C_{li}. \tag{7}$$

Тогда калибровочное поле с группой Z_2 на решетке Z^d можно интерпретировать, как модель Изинга (7) с „незамороженными“ (суммирование в (6) по обменному взаимодействию $C_{ij} = \pm 1$) случайными антиферромагнитными связями, которые, в свою очередь, взаимодействуют между собой на плакетах. Фазовый переход в этой нерегулярной системе и будет соответствовать переходу между кварковой и барионной фазами.

3. Некоторые особенности нерегулярных систем: фрустрация

Прежде, чем приступить к изучению фазового перехода в системе с гамильтонианом (7) заметим, что при исследовании нерегулярных спиновых систем полезную роль играет понятие фрустрации [12, 13]. Это понятие помогает выяснить некоторые особенности таких систем [14, 15].

Рассмотрим нерегулярную модель Изинга с гамильтонианом $H_{\delta,\gamma=0}$ (см. (7)) и введем функцию фрустрации

$$\Phi_C = \prod_C C_{ij}, \tag{8}$$

где C — замкнутый контур, проходящий по ребрам решетки $\boldsymbol{Z}^d$. Если для заданной конфигурации поля $\{C_{ij}\}$ имеем $\Phi_C < 0$, то спины вдоль контура C невозможно выстроить согласованно, т.е. так, чтобы их энергия взаимодействия достигла наименьшего возможного значения $-L(C)$, где $L(C)$ — длина контура (контур C называют в этом случае фрустрированным). Это означает, что фрустрация препятствует установлению ферромагнитного (антиферромагнитного) порядка. Нерегулярная модель Изинга называется полностью фрустрированной, если $\Phi_P < 0$ для любого плакета P, и моделью без фрустрации в противоположном случае. Из выражения (6) следует тогда, что рассматриваемая нами модель калибровочного поля с группой Z_2 на решетке $\boldsymbol{Z}^d(3)$ эквивалентна нерегулярной ферромагнитной ($\delta > 0$) модели Изинга со случайно фрустрированными плакетами. Причем, вероятность фрустрации определяется фактором

$$(Z[H_{\delta,\gamma}])^{-1} e^{\gamma \sum_P C_{ij}C_{jk}C_{kl}C_{li}}. \tag{9}$$

При $\gamma \to +\infty$ (предел сильной связи) число фрустрированных плакетов на решетке стремится к нулю, а при $\gamma < +\infty$ вероятность появления фрустрированных плакетов отлична от нуля. Напротив, при $\gamma \to -\infty$ стремится к нулю вероятность встретить на решетке нефрустрированный плакет. Поэтому этот предел соответствует полностью фрустрированной модели Изинга.

4. Предел сильной связи $\gamma = +\infty$ и случай $\gamma = 0$

Для „замороженных" антиферромагнитных примесных связей (конфигурация поля $\{C_{ij}\}$ фиксирована) фазовый переход в модели Изинга с гамильтонианом $H_{\delta,\gamma=0}$ (7) существенно зависит от концентрации фрустрированных плакетов [14–16]. Мы рассмотрим эту зависимость в случае „незамороженных" примесей для гамильтониана (7).

Теорема 1

При $\gamma \to +\infty$ статистическая сумма (6) выражается через статистическую сумму регулярной ферромагнитной модели Изинга, на решетке $\boldsymbol{Z}^d$, со взаимодействием ближайших соседей и нулевым магнитным полем.

Доказательство

Статистическая сумма (6) инвариантна относительно калибровочного преобразования $\boldsymbol{C}_{ij} \to \boldsymbol{C}'_{ij} = \sigma_i \boldsymbol{C}_{ij} \sigma_j$, поэтому

$$Z[H_{\delta,\gamma}] = 2^N \sum_{\{\boldsymbol{C}=\pm 1\}} e^{-H_{\delta,\gamma}[\boldsymbol{C}]},$$

$$H_{\delta,\gamma}[C] = -\delta \sum_{(ij)} \boldsymbol{C}_{ij} - \gamma \sum_{P} \boldsymbol{C}_{ij}\boldsymbol{C}_{jk}\boldsymbol{C}_{kl}\boldsymbol{C}_{li}, \tag{10}$$

где N — число узлов решетки. При $\gamma \to +\infty$ статистическая сумма (10) соответствует суммированию по всем конфигурациям поля без фрустраций на плакетах, а именно:

$$\lim_{\gamma \to +\infty} e^{-\gamma \sum_P 1} Z[H_{\delta,\gamma}] = 2^N \sum_{\{\boldsymbol{C}=\pm 1, \Phi_P = +1\}} e^{\delta \sum_{(ij)} \boldsymbol{C}_{ij}}. \tag{11}$$

С другой стороны, рассмотрим на $\boldsymbol{Z}^d$ ферромагнитную модель Изинга со взаимодействием ближайших соседей:

$$H_{\mathrm{I}} = -\delta \sum_{(ij)} \mu_i \mu_j, \qquad \mu_i = \pm 1, \tag{12}$$

и введем новые переменные $A_{ij} = \mu_i \mu_j$, сосредоточенные на ребрах решетки $\boldsymbol{Z}^d$. Статистическая сумма для модели Изинга (12) тогда имеет вид

$$Z[H_{\mathrm{I}}] = \sum_{\{A=\pm 1\}}' e^{\delta \sum_{(ij)} A_{ij}}, \tag{13}$$

где $\sum'$ означает некоторое дополнительное условие на суммирование по конфигурациям поля $\{A_{ij}\}$, которое учитывает отсутствие независимости новых переменных. Из определения поля A_{ij} следует, что для любого плакета $P = [ijkl]$

$$\Phi_P = A_{ij}A_{jk}A_{kl}A_{li} = +1.$$

Следовательно, дополнительные условия на суммирования в (11) и (13) совпадают, поэтому

$$\lim_{\gamma \to +\infty} e^{-\gamma \sum_P 1} Z[H_{\delta,\gamma}] = 2^N Z[H_{\mathrm{I}}]. \qquad \blacksquare$$

Замечание 1

Аналогичный результат имеет место для модели Изинга (7) без фрустраций в случае „замороженных" примесей. В работе [15] он доказан с помощью явного использования локального калибровочного преобразования $\sigma_i \to -\sigma_i$, $\boldsymbol{C}_{ij} \to -\boldsymbol{C}_{ij}$ (для всех j), которое оставляет инвариантным гамильтониан (7).

Следствие 1

В пределе сильной связи $\gamma \to +\infty$ калибровочное поле (3) на решетке Z^d при $d \geqslant 2$ испытывает фазовый переход по параметру δ.

Теорема 2

При $\gamma = 0$ калибровочное поле (3) на решетке Z^d не имеет фазового перехода.

Доказательство

После локального калибровочного преобразования $C_{ij} \to C'_{ij} = \sigma_i C_{ij} \sigma_j$ статистическая сумма $Z[H_{\delta,\gamma=0}]$ (6) с точностью до множителя совпадает со статистической суммой модели Изинга без взаимодействия во внешнем магнитном поле δ (см. (10)). ■

Следствие 2

Таким образом, появление в модели (3) или (7), „достаточного" количества фрустрированных плакетов (см. (9)) приводит к исчезновению фазового перехода.

5. *Случай конечной константы связи $\gamma > 0$ и предел $\gamma = -\infty$*

Эти случаи удается исследовать полностью лишь для плоской решетки $Z^{d=2}$.

Теорема 3

В пределе $\gamma \to -\infty$ в модели калибровочного поля (3) на решетке $Z^{d=2}$ фазовый переход отсутствует.

Доказательство

Из (9) следует, что при $\gamma \to -\infty$ каждая конфигурация поля $\{C_{ij}\}$ в статистической сумме (6) соответствует полностью фрустрированной модели Изинга. Поскольку все полностью фрустрированные модели Изинга на $Z^{d=2}$ эквивалентны периодической модели с полной фрустрацией [15], то статистическая сумма

$$\lim_{\gamma \to -\infty} e^{\gamma \sum_P 1} Z[H_{\delta,\gamma}]$$

с точностью до множителя (число полностью фрустрированных конфигураций $\{C_{ij}\}$, умноженное на 2^N) совпадает со статистической суммой периодической полностью фрустрированной модели. В последней, как известно [17], фазовый переход отсутствует. ■

Для $\gamma > 0$ воспользуемся преобразованием к переменным $S_\alpha = \pm 1$ на дуальной к $Z^{d=2}$ решетке [8, 10]. Статистическая сумма (10) приводится тогда к виду:

$$Z[H_{\delta,\gamma}] = 2^N[(\operatorname{ch}\delta)^2 \operatorname{ch}\gamma]^N \sum_{\{S=\pm 1\}} \exp\{\sum_\alpha \tfrac{1}{2}(1-S_\alpha)\ln \operatorname{th}\gamma + \sum_{(\alpha\beta)} \tfrac{1}{2}(1-S_\alpha S_\beta)\ln \operatorname{th}\delta\},$$

который соответствует модели Изинга во внешнем поле $h = -\ln \operatorname{th}\gamma$. Следовательно, имеет место

Теорема 4

При $0 < \gamma < +\infty$ в модели калибровочного поля (3) на решетке $Z^{d=2}$ фазовый переход отсутствует.

Замечание 2

Полученный результат означает, что на плоской решетке $Z^{d=2}$ фазовый переход в системе (3), или (7), исчезает при сколь угодно малой концентрации фрустрированных плакетов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. S. Abers, B. W. Lee, *Phys. Reports* **9C**, 1 (1973).

[2] *Quark Confinement and Field Theory*, eds. D. Stump and D. Weingarten, John Wiley & Sons, New York 1977.

[3] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, Москва 1978.

[4] Proceedings of Les Houches Winter Advanced Study Institute (March 1978), *Phys. Reports* **49C**, 91 (1979).

[5] H. D. Politzer, *Phys. Reports* **14C**, 130 (1974).

[6] K. Wilson, *Phys. Rev.* **D10**, 2445 (1974).

[7] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **59B**, 82 (1975); G. t'Hooft, *Nucl. Phys.* **B138**, 1 (1978).

[8] K. Wilson, Erice Lecture, CNLS-321, 1975; M. Creutz, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 561 (1978); J. Kogut, L. Susskind, *Phys. Rev.* **D11**, 395 (1975).

[9] R. Balian, J. M. Drouffe, C. Itzykson, *Phys. Rev.* **D10**, 3376 (1974); **D11**, 2098 and 2104 (1975).

[10] J. M. Drouffe, C. Itzykson, *Phys. Reports* **38C**, 133 (1978).

[11] E. Fradkin, L. Susskind, *Phys. Rev.* **D17**, 2637 (1978).

[12] G. Toulouse, *Commun. Phys.* **2**, 115 (1977).

[13] G. Toulouse, *The Frustration Model*, in Proceedings of Karpacz Winter School, 1979.

[14] S. Kirkpatrick, *Phys. Rev.* **B16**, 4630 (1977).

[15] В. А. Загребнов, В. Б. Приезжев, Препринт ОИЯИ, P17-12543, Дубна 1979.

[16] E. Fradkin, B. A. Huberman, S. H. Shenker, *Phys. Rev.* **B18**, 4789 (1978).

[17] G. André, R. Bidaux, J.-P. Capton, R. Conte, L. de Seze, *J. Phys.* (France) **40**, 479 (1979).