

ÜBER DIE VERWENDBARKEIT DER VERSCHIEDENEN ELEKTROMAGNETISCHEN AUSSTRAHLUNGS- UND ENDLICHKEITSBEDINGUNGEN

On the Use of the Different Electromagnetic Radiation and Finiteness Conditions

VON A. RUBINOWICZ*

Polnische Akademie der Wissenschaften

(Eingegangen am 27. Mai 1972)

Es werden die Bedingungen angegeben, denen die elektromagnetischen Felder genügen müssen, damit man auf sie eine der drei wichtigsten elektromagnetischen Ausstrahlungs- und eventuell auch Endlichkeitsbedingungen anwenden kann. Das Ergebnis der Untersuchung ist, daß nur die vom Verfasser auf Grund des Lorentz-Huygensschen Prinzips angegebenen Ausstrahlungsbedingungen keine speziellen Anforderungen an das elektromagnetische Feld stellen, auf das sie angewendet werden sollen. Die beiden übrigen Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen können insbesondere auf elektromagnetische Felder angewendet werden, die im Unendlichen nach elektrischen und magnetischen Multipolfeldern entwickelt werden können.

In der physikalischen Literatur werden verschiedene elektromagnetische Ausstrahlungs- und auch Endlichkeitsbedingungen formuliert und verwendet. Die drei wichtigsten werden in § 1 zusammengestellt. In den nachfolgenden Paragraphen werden mögliche Anwendungsbereiche dieser drei Bedingungen angegeben.

Insbesondere wird in § 2 darauf hingewiesen, daß die vom Verfasser (Rubinowicz 1971) abgeleiteten Ausstrahlungsbedingungen von einem elektromagnetischen Feld das Erfülltsein keiner speziellen Bedingungen erfordern, damit man diese Ausstrahlungsbedingungen auf das betreffende Feld anwenden kann.

In § 3 wird bewiesen, daß eine schärfere, schon vorher von Claus Müller (1945/46, 1969) angegebene Formulierung der in § 2 betrachteten Bedingungen auf elektromagnetische Felder anwendbar ist, die im Unendlichen nach elektrischen und magnetischen Multipolfeldern entwickelt werden können. Da für die meisten in der Physik auftretenden elektromagnetischen Felder dies zutrifft, ist es begreiflich, daß die in § 3 betrachteten Bedingungen in verschiedenen physikalischen Arbeiten erfüllt werden. Ein Teil der zu dem § 3 gehörigen Rechnungen wurde in einem der Arbeit beigefügten Anhang durchgeführt um den § 3 mit Rechnungen nicht zu überladen.

Wie in § 4 gezeigt wird, genügen die einzelnen kartesischen Komponenten der elektro-

* Adresse des Verfassers: Hoża 74/4, 00-682 Warszawa, Polen.

magnetischen Felder, die nach elektrischen und magnetischen Multipolfeldern im Unendlichen entwickelbar sind, auch noch den bekannten Sommerfeldschen Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen für die Helmholtzsche Differentialgleichung.

Da nur die vom Verfasser abgeleiteten (Rubinowicz 1971) und in § 2 besprochenen Ausstrahlungsbedingungen von einem elektromagnetischen Feld nicht das Erfülltsein besonderer Bedingungen erfordern, kann man nur sie als die eigentlichen Ausstrahlungsbedingungen der elektromagnetischen Theorie ansehen. Die Verwendung irgendwelcher Endlichkeitsbedingungen ist dann nicht notwendig.

§ 1. Verschiedene elektromagnetische Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen

Bisher wurden für das elektromagnetische Feld sehr verschiedene Ausstrahlungs- und auch Endlichkeitsbedingungen angegeben und verwendet. So haben manche Autoren für die einzelnen kartesischen Komponenten des elektromagnetischen Feldes die bekannten Sommerfeldschen skalaren Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen für die Helmholtzsche Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

benutzt. Man kann sie in vektorieller Schreibweise in der nachstehenden Form zusammenfassen

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} r_{PQ} \left[\frac{\partial}{\partial r_{PQ}} E(Q) - ikE(Q) \right] = 0, \quad (1.1a)$$

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} E(Q) = 0, \quad (1.1b)$$

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} r_{PQ} \left[\frac{\partial}{\partial r_{PQ}} H(Q) - ikH(Q) \right] = 0, \quad (1.1c)$$

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} H(Q) = 0. \quad (1.1d)$$

Hier und stets auch im folgenden ist P ein Beobachtungspunkt und Q ein Punkt auf einer Kugelfläche F_∞ mit dem Mittelpunkt im Beobachtungspunkt P . Die Bezeichnung dieser Fläche hat den unteren Index ∞ da sie bei einem nachfolgenden Grenzübergang ins Unendliche verschoben wird. Die Bedingungen (1.1a) und (1.1c) werden dabei als die Ausstrahlungsbedingungen und (1.1b) und (1.1d) als die Endlichkeitsbedingungen bezeichnet.

Ferner haben verschiedene Autoren sich der von Claus Müller (1945/46, 1969) angegebenen Fassung der elektromagnetischen Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen von der Gestalt

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} r_{PQ} [E(Q) + n \times H(Q)] = 0, \quad (1.2a)$$

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} E(Q) = 0, \quad (1.2b)$$

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} r_{PQ} [H(Q) - n \times E(Q)] = 0, \quad (1.2c)$$

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} H(Q) = 0 \quad (1.2d)$$

bedient. Hier bedeutet n die äußere Normale an die Kugel­fläche F_∞ , also einen Einheits­vektor mit dem Richtungssinn der Vektors r_{PQ} .

Schließlich konnte der Verfasser (Rubinowicz 1971) neuerdings zeigen, daß aus dem von H. A. Lorentz im Jahre 1896 angegebenen elektromagnetischen Huygensschen Prinzip sich die Ausstrahlungsbedingungen

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} r_{PQ} [E_\perp(Q) + n \times H_\perp(Q)] = 0, \quad (1.3a)$$

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} r_{PQ} [H_\perp(Q) - n \times E_\perp(Q)] = 0 \quad (1.3b)$$

ohne jede Endlichkeitsbedingungen ergeben. Es bedeuten hier $E_\perp(Q)$ und $H_\perp(Q)$ die vektoriellen Tangentialkomponenten von $E(Q)$ und $H(Q)$ an die Fläche F_∞ . Die Ausstrahlungsbedingungen (1.3a) und (1.3b) können formell als eine schwächere Version der stärkeren Fassung (1.2a) und (1.2c) der Ausstrahlungsbedingungen angesehen werden.

Im folgenden wollen wir uns die Frage stellen, für welche elektromagnetischen Felder die angeführten Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen vom mathematischen und physikalischen Standpunkt aus verwendet werden können.

§ 2. Anwendungsbereich der Ausstrahlungsbedingungen (1.3a) und (1.3b)

Zunächst muß festgestellt werden, daß die schwächere Fassung (1.3a) und (1.3b) der elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen für jede beliebige Belegung der Kugel­fläche F_∞ mit vektoriellen Tangentialkomponenten von elektromagnetischen Feldern, selbst wenn diese völlig unstetig sind, verwendet werden kann. Sie ist mathematisch vollständig einwandfrei und ist ohne jede Endlichkeitsbedingungen für alle mathematischen Überlegungen, die die elektromagnetischen Felder betreffen, völlig hinreichend. Auf ihrer Grundlage kann z. B. der Eindeutigkeitsbeweis für ein elektromagnetisches Randwertproblem, das in einem ins Unendliche sich erstreckenden Raumgebiet definiert ist, durchgeführt werden (Rubinowicz 1971). (1.3a) und (1.3b) ergeben sich auch aus jeder Transformation des Lorentz-Huygensschen Prinzips (Rubinowicz 1972), z. B. aus der Kottlerschen Version (Kottler 1923) oder aus der als Umformung I oder II vom Verfasser (Rubinowicz 1965) bezeichneten Transformation des Lorentz-Huygensschen Prinzips.

Die Ausstrahlungsbedingungen (1.3a) und (1.3b) sind aber auch physikalisch sehr befriedigend. Sie werden ja aus dem Lorentz-Huygensschen Prinzip abgeleitet, das nicht nur mathematisch einwandfrei sondern auch physikalisch sehr einleuchtend ist. Gemäß diesem Prinzip sendet ja doch jedes Flächenelement df_Q der Begrenzungsfläche eines Raumgebietes unabhängig von allen anderen Flächenelementen dieser Fläche eine elektromagnetische Strahlung aus, die als eine Huygens-Fresnelsche Elementarwelle interpretiert werden kann. Dies ist umso höher einzuschätzen als dies, soweit mir bekannt ist, bei allen anderen Formulierungen des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips (ausgenommen triviale Umformungen des Lorentz-Huygensschen Prinzips) nicht der Fall ist. Den Ausstrahlungsbedingungen (1.3a) und (1.3b) sollte daher bei allen mathematischen und physikalischen Untersuchungen stets unbedingt der Vorzug eingeräumt werden. Um diese Bedingungen

an ein elektromagnetisches Feld anzuwenden, ist es nicht notwendig an dieses Feld irgend welche besonderen Bedingungen zu stellen, wie etwa ein Verschwinden im Unendlichen oder ein stetiges Verhalten längs der Begrenzungsfläche des Raumgebietes für das das Lorentz-Huygenssche Prinzip verwendet wird.

Die Verwendung der Beziehungen (1.3a) und (1.3b) bietet auch einen nicht zu verachtenden rechnerischen Vorteil: Da die Beziehung (1.3a) vektoriell mit \mathbf{n} multipliziert die Beziehung (1.3b) ergibt und (1.3b) bei einer solchen Multiplikation (1.3a) liefert, so genügt es stets nur das Bestehen einer dieser beiden Beziehungen durch eine Rechnung zu bestätigen, um in einem Spezialfalle das Bestehen der elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen sicherzustellen. Auch ist es nicht notwendig zu untersuchen, ob irgend welche Endlichkeitsbedingungen erfüllt sind, weil ja doch keine solchen vorhanden sind. Von allen drei in der vorliegenden Untersuchung besprochenen Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen erfordert die Feststellung, daß die Ausstrahlungsbedingung (1.3a) oder (1.3b) erfüllt ist, den geringsten Arbeitsaufwand. Selbstverständlich empfiehlt sich die Verwendung der Ausstrahlungsbedingungen (1.3a) und (1.3b) auch in dem Falle eines elektromagnetischen Feldes auf das man auch andere Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen anwenden kann.

§ 3. Anwendungsbereich der Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen (1.2a) bis (1.2d)

Die stärkeren Ausstrahlungs- und die Endlichkeitsbedingungen, (1.2a) und (1.2c) bzw. (1.2b) und (1.2d), können aus einer Transformation des Lorentz-Huygensschen Prinzips gewonnen werden, wenn man das elektromagnetische Feld dieses Prinzips durch die vier elektromagnetischen Potentiale ausdrückt und es in einer Gestalt verwendet, die vom Verfasser als Umformung II bezeichnet wurde (Rubinowicz 1965; 1966, S. 248). Allerdings muß diese Umformung zu diesem Zweck ein wenig verstümmelt werden.

Um den Anwendungsbereich der stärkeren Ausstrahlungs- und der Endlichkeitsbedingungen umgrenzen zu können, müssen wir angeben, in welcher Weise durch die Umformung II das elektromagnetische Feld dargestellt wird. Für das elektromagnetische Feld $\mathbf{E}(P)$, $\mathbf{H}(P)$ ergeben die elektromagnetischen Potentiale die nachstehende Darstellung

$$\mathbf{E}(P) = -\text{grad}_P \varphi(P) + ik\mathbf{A}(P) - \text{rot}_P \mathbf{B}(P), \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{H}(P) = -\text{grad}_P \psi(P) + ik\mathbf{B}(P) + \text{rot}_P \mathbf{A}(P). \quad (3.1b)$$

Dabei werden im Falle des Lorentz-Huygensschen Prinzips die Vektorpotentiale $\mathbf{A}(P)$ und $\mathbf{B}(P)$ durch

$$4\pi\mathbf{A}(P) = \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \mathbf{H}(Q) \times \mathbf{n} df_Q, \quad (3.2a)$$

$$4\pi\mathbf{B}(P) = \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}(Q) df_Q \quad (3.2b)$$

gegeben. Die skalaren elektrischen bzw. magnetischen Potentiale $\varphi(P)$ bzw. $\psi(P)$ werden durch

$$4\pi\varphi(P) = - \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} E_n(Q) df_Q + \frac{i}{k} \int_R \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} H(Q) ds, \quad (3.3a)$$

$$4\pi\psi(P) = - \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} H_n(Q) df_Q - \frac{i}{k} \int_R \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} E(Q) ds \quad (3.3b)$$

dargestellt.

Dabei wird angenommen, daß die Fläche F einen Teil der Kugelfläche F_∞ bildet. Durch R wird die Berandung der Fläche F bezeichnet, die sich selbstverständlich auf der Fläche F_∞ befindet.

Um nicht zweimal im wesentlichen die gleichen Rechnungen durchführen zu müssen, wollen wir uns im folgenden auf die Betrachtung des elektrischen Feldes $E(P)$ (3.1a) beschränken. Die Überlegungen für das magnetische Feld $H(P)$ (3.1b) verlaufen vollständig analog.

Um zunächst die schwächere Ausstrahlungsbedingung (1.3a) anzugeben, hat man durch eine einfache Umformung des Linienintegrals in (3.3a), mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes und der Maxwell'schen Gleichung $-ik E = \text{rot } H$, zu zeigen, daß das skalare elektrische Potential

$$\varphi(P) = 0 \quad (3.4)$$

ist. Das von der Fläche F ausgestrahlte elektrische Feld $E(P)$ (3.1a) wird somit nur durch die beiden Vektorpotentiale $A(P)$ und $B(P)$, (3.2a) und (3.2b), dargestellt. Man erhält (Rubinowicz 1972)

$$4\pi E(P) = \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \left\{ ik[H(Q) \times n - E_\perp(Q)] + \frac{1}{r_{PQ}} E_\perp(Q) \right\} df_Q. \quad (3.5)$$

Dabei stellt $E(P)$ in (3.5) nur das von der Belegung der Fläche F herrührende elektrische Feld dar.

Wird der Radius r_{PQ} der Kugelfläche F_∞ unendlich, so erhält man in der Tat, da $df_Q = r_{PQ}^2 d\omega$ ist, die Ausstrahlungsbedingung (1.3a) und ferner, die Bedingung

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} E_\perp(Q) = 0. \quad (3.6)$$

Die Bedingung (3.6) ist jedoch, wie man zeigen kann (Rubinowicz 1972), keine Endlichkeitsbedingung im Sinne einer zusätzlichen Forderung zu den Ausstrahlungsbedingungen. Sie ist nur der Ausdruck für die Tatsache, daß alle durch elektromagnetische Potentiale ausdrückbaren Felder im Unendlichen verschwinden.

Aus dem oben betrachteten Ausdruck der Umformung II für das elektrische Feld $E(P)$

ergibt sich formell auch die stärkere Ausstrahlungsbedingung (1.2a) sowie die Endlichkeitsbedingung (1.2b), wenn man in dem Ausdruck (3.3a) für das elektrische skalare Potential $\varphi(P)$ das Linienintegral streicht. Es verschwindet dann im allgemeinen nicht $\varphi(P)$ und zu dem Ausdruck (3.5) für das elektrische Feld $4\pi\mathbf{E}(P)$ muß dann noch gemäß (3.1a) der Ausdruck

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad}_P 4\pi\varphi(P) &= \operatorname{grad}_P \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} E_n(Q) df_Q = \\ &= - \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \left(ik - \frac{1}{r_{PQ}} \right) E_n df_Q \end{aligned}$$

hinzutreten, da ja auf der Kugel F_∞ der Vektor \mathbf{n} eine äußere Normale ist und daher

$$\operatorname{grad}_P r_{PQ} = -\mathbf{n}$$

ist. Im ganzen wird somit

$$4\pi\mathbf{E}(P) = \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \left\{ ik[\mathbf{H}(Q) \times \mathbf{n} - \mathbf{E}(Q)] + \frac{1}{r_{PQ}} \mathbf{E}(Q) \right\} df_Q.$$

Dieser Ausdruck verschwindet bei einer Verschiebung von F_∞ ins Unendliche, wenn das elektromagnetische Feld im Unendlichen die stärkere Ausstrahlungsbedingung (1.2a) sowie die Endlichkeitsbedingung (1.2b) erfüllt.

Vom mathematischen Standpunkt könnte man das Streichen des Linienintegrals in dem Ausdruck (3.3a) für das skalare elektrische Potential $\varphi(P)$ als gerechtfertigt ansehen, falls F durch eine geschlossene Kugeloberfläche F_∞ dargestellt wird und das elektromagnetische Feld auf F stetig ist. Man muß jedoch bedenken, daß das Verschwinden von $\varphi(P)$ nicht vom Werte des Linien- oder Flächenintegrals abhängt, der in dem Ausdruck (3.3a) für $\varphi(P)$ auftritt. Wenn das Linienintegral in (3.3a) verschwindet, so verschwindet mit ihm zugleich auch das Flächenintegral, weil ja beide bis auf das Vorzeichen einander gleich sind (vgl. Rubinowicz 1972). Es verschwindet dann also auch das skalare Potential $\varphi(P)$ und wir erhalten daher die schwächere und nicht die stärkere Fassung der Ausstrahlungsbedingung. Vom mathematischen Standpunkt scheint also die obige Ableitung der stärkeren Ausstrahlungs- und der Endlichkeitsbedingung, (1.2a) bzw. (1.2b), nicht gerechtfertigt zu sein.

Wenn die stärkeren Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen mathematisch nicht einwandfrei begründet sind, so muß man sich die Frage stellen, warum sie dennoch in allen Fällen, in denen sie bisher verwendet wurden, erfüllt sind. Um diese Frage zu beantworten muß man sich darüber klar werden, wodurch sich die stärkere Fassung (1.2a) bis (1.2d) der elektromagnetischen Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen von den schwächeren Ausstrahlungsbedingungen (1.3a) und (1.3b) unterscheidet. Gegenüber den schwächeren Ausstrahlungsbedingungen (1.3a) und (1.3b) fordern die stärkeren (1.2a)

und (1.2c), noch das Erfülltsein der beiden Endlichkeitsbedingungen

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} r_{PQ} E_n(Q) = 0, \quad \lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} r_{PQ} H_n(Q) = 0, \quad (3.7)$$

die sich aus (1.2a) und (1.2c) durch eine skalare Multiplikation mit dem Einheitsvektor der Normalen \mathbf{n} ergeben.

Setzt man voraus, daß das elektromagnetische Feld durch die elektromagnetischen Potentiale dargestellt wird, also die Bedingung (3.6) und eine entsprechende für das magnetische Feld erfüllt ist, so fordern die Endlichkeitsbedingungen (1.2b) und (1.2d) der stärkeren Fassung noch das Erfülltsein der beiden Bedingungen

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} E_n(Q) = 0, \quad \lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} H_n(Q) = 0, \quad (3.7a)$$

die immer befriedigt sind, sobald dies von den Bedingungen (3.7) zutrifft. Die Bedingungen (3.7a) brauchen wir daher beim Bestehen von (3.7) nicht in Betracht zu ziehen.

Wir sind somit zu dem Schlusse gelangt, daß Felder, die durch elektromagnetische Potentiale darstellbar sind, im Unendlichen nur noch der Bedingung (3.7) genügen müssen, um die schärferen Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen zu befriedigen.

Falls jedoch das Feld $\mathbf{E}(Q)$, $\mathbf{H}(Q)$ nicht durch elektromagnetische Potentiale darstellbar ist, so müssen außerdem auch noch die tangentialen Komponenten des Feldes an die Fläche F_∞ im Unendlichen verschwinden

$$\lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} E_\perp(Q) = 0, \quad \lim_{r_{PQ} \rightarrow \infty} H_\perp(Q) = 0. \quad (3.8)$$

In den beiden oben betrachteten Fällen, (3.7) und (3.8), wird somit der Unterschied zwischen der stärkeren und der schwächeren Fassung, (1.2a) bis (1.2d) bzw. (1.3a) und (1.3b), durch die Endlichkeitsbedingungen gegeben.

Im Anhang wird nun gezeigt, daß ein elektromagnetisches Feld, das im Unendlichen nach elektrischen Multipolfeldern entwickelbar ist, die Bedingungen (3.7) und (3.8) erfüllt.

Das transversale elektrische Feld $\mathbf{E}_1(P)$ (A.24) verschwindet nämlich im Unendlichen wie $1/r$. Es erfüllt daher die in (3.8) für $\mathbf{E}_\perp(Q)$ verzeichnete Bedingung. Das longitudinale elektrische Feld $\mathbf{E}_2(P)$ (A.25) geht im Unendlichen wie $1/r^2$ gegen die Null, genügt daher der in (3.7) auftretenden Bedingung für $E_n(Q)$.

Die im Unendlichen wie $1/r$ und $1/r^2$ verschwindenden Glieder des magnetischen Feldes (A.1) werden durch (A.11) gegeben. Da beide eine transversale Strahlung darstellen erfüllen sie die Bedingungen für das magnetische Feld $H_n(Q)$ in (3.7) und $H_\perp(Q)$ in (3.8).

In gleicher Weise kann man eine asymptotische Entwicklung für ein entsprechendes elektromagnetisches Feld nach magnetischen Multipolfeldern angeben. Im allgemeinen wird man jedoch ein elektromagnetisches Feld im Unendlichen nur zugleich nach elektrischen und magnetischen Multipolfeldern entwickeln können. Darauf deutet schon das verschiedene asymptotische Verhalten des elektrischen und magnetischen Feldes des im Anhang betrachteten Falles der Entwicklung nach elektrischen Multipolfeldern.

§ 4. Anwendungsbereich der Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen (1.1a) bis (1.1d)

Der Anwendungsbereich der Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen (1.1a) bis (1.1d) erstreckt sich ebenfalls auf elektromagnetische Felder, die nach elektrischen und magnetischen Multipolfeldern entwickelt werden können. Man kann dies wohl am einfachsten in der Weise beweisen, daß man die Bedingungen (1.1a) bis (1.1d) aus den Bedingungen (1.2a) bis (1.2d) ableitet (Saunders 1952, vgl. auch Rubinowicz 1971). Zu diesem Zweck kann man in den Ausstrahlungsbedingungen (1.2a) und (1.2c) die Feldstärken $E(Q)$ bzw. $H(Q)$ mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen

$$-ik E = \text{rot } H, ik H = \text{rot } E \quad (4.1)$$

eliminieren. Man erhält auf diese Weise die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r(\text{rot } H - ikn \times H) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r(\text{rot } E - ikn \times E) &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Im folgenden bedienen wir uns eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems, x, y, z , mit dem Ursprung in einem Punkte der Fläche F_∞ . Die positive z -Achse dieses Koordinatensystems fällt mit der Normalen n an die Fläche F_∞ zusammen.

Die x - und y -Komponenten der beiden Beziehungen (4.2) ergeben die nachstehenden Bedingungen

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial z} H_y - ikH_y - \frac{\partial}{\partial y} H_z \right) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial z} H_x - ikH_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial z} E_y - ikE_y - \frac{\partial}{\partial y} E_z \right) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial z} E_x - ikE_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3b)$$

Bei der Berechnung der z -Komponente der beiden Gleichungen (4.2) erhält man, da die Normale n die Richtung der z -Achse hat, zunächst die Gleichungen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \text{rot}_z H = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \text{rot}_z E = 0,$$

die mit Rücksicht auf die Maxwellschen Gleichungen (4.1) in die Bedingungen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r E_z = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r H_z = 0. \quad (4.3c)$$

übergehen. Sie sind mit den Bedingungen (3.7) identisch.

Für die nachfolgenden Überlegungen können wir die Endlichkeitsbedingungen (1.2b) und (1.2d) unverändert übernehmen. Es stellt dann (4.3c) eine verschärfte Fassung der z-Komponente dieser Bedingungen dar.

Damit (4.3a) und (4.3b) mit den Ausstrahlungsbedingungen (1.1c) und (1.1a) übereinstimmen, müssen im Unendlichen die Ableitungen von E_z und H_z nach x und nach y stärker als $1/r$ verschwinden, so daß man sie in den Bedingungen (4.3a) und (4.3b) nicht zu berücksichtigen braucht. Ob dies in der Tat erfüllt ist, können wir mit Hilfe der in dem Anhang für das elektromagnetische Feld angegebenen Ausdrücken feststellen.

Zunächst erkennt man, daß die Ableitungen von $H_z(P)$ nach x und y identisch verschwinden, da ja der Ausdruck (A.11) für $H(P)$, der sowohl Glieder enthält, die im Unendlichen wie $1/r$ als auch wie $1/r^2$ verschwinden, nur Transversal- jedoch keine Normal-komponenten enthält.

Im Falle des elektrischen Feldes ist eine Normalkomponente nur in $E_2(P)$ (A.25) enthalten, das im Unendlichen wie $1/r^2$ abnimmt. Die Ableitungen von $E_2(P)$ nach x und y gehen mindestens ebenso stark gegen die Null. Dabei wird selbstverständlich vorausgesetzt, daß die Ableitungen von $f_0(\vartheta, \varphi)$ nach ϑ und φ endliche Werte ergeben. *Mutatis mutandis* verhält sich ebenso ein elektromagnetisches Feld, das nach magnetischen Multipolfeldern und ein solches das zugleich nach elektrischen und magnetischen Multipolfeldern entwickelt werden kann.

Die Frage, ob es nicht auch noch andere elektromagnetische Felder gibt, als die oben in den beiden letzten Paragraphen untersuchten, die den Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen (1.2a) bis (1.2d) bzw. (1.1a) bis (1.1d) genügen, wird durch die obige Untersuchung selbstverständlich nicht beantwortet.

Anhang

Im laufenden Anhang müssen wir noch beweisen, daß ein im Unendlichen nach elektrischen und magnetischen Multipolfeldern entwickelbares elektromagnetisches Feld den beiden Endlichkeitsbedingungen (3.7) und (3.8) entspricht.

Da wir im folgenden die elektromagnetischen Felder nur in ihrer Abhängigkeit vom Beobachtungspunkt P betrachten, so wollen wir die sphärischen Koordinaten dieses Punktes P in Bezug auf den Koordinatenursprung O mit r, ϑ, φ also der Einfachheit der Schreibweise halber ohne jeden Index bezeichnen.

Ein durch ein elektrisches Debyesches Potential darstellbares elektromagnetisches Feld wird durch

$$E(P) = \text{rot rot } [r\Pi(P)], \quad H(P) = ik \text{ rot } [r\Pi(P)] \quad (\text{A.1})$$

gegeben. Dabei wird das Debyesche Potential $\Pi(P)$ im Unendlichen durch

$$\Pi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{nm} \zeta_n^{(1)}(kr) Y_{nm}(\vartheta, \varphi)$$

dargestellt, falls dort dieses Feld nach elektrischen Multipolfeldern entwickelt werden kann.

$\zeta_n^{(1)}(kr)$ wird hier durch die Hankelfunktion erster Art $H_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ mit halbzahligen Index

$$\zeta_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

definiert, so daß $\Pi(P)$ ins Unendliche fortschreitenden elektromagnetischen Wellen entspricht.

Eine asymptotische Entwicklung eines elektromagnetischen Feldes nach magnetischen Multipolfeldern erhält man, wenn man in (A.1) $E(P)$ und $H(P)$ durch $-H(P)$ und $E(P)$ ersetzt. Daher bietet auch keine Schwierigkeiten der allgemeine Fall, ein elektromagnetisches Feld im Unendlichen zugleich nach elektrischen und magnetischen Multipolfeldern zu entwickeln. Für die folgenden Überlegungen ist es daher hinreichend wenn wir uns weiterhin nur mit der Entwicklung des elektromagnetischen Feldes (A.1) nach elektrischen Multipolfeldern beschäftigen.

Um die asymptotische Abhängigkeit von (A.1) festzustellen, ist es zweckdienlich für das Debyesche Potential $\Pi(P)$ die von Sommerfeld (1947, S. 193) angegebene Entwicklung

$$\Pi(P) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n(\vartheta, \varphi)}{r^n} \quad (\text{A.2})$$

zu verwenden, die nach Gliedern abnehmender Größenordnungen von r im Unendlichen fortschreitet, was für unsere folgenden Überlegungen von entscheidender Bedeutung ist. Allerdings müssen wir voraussetzen, daß diese Entwicklung konvergent ist.

Durch Einsetzen von (A.2) in die Helmholtzsche Differentialgleichung erhält man für die Funktionen $f_n(\vartheta, \varphi)$ nach Sommerfeld die nachstehende Rekursionsformel

$$2ik(n+1)f_{n+1}(\vartheta, \varphi) = [n(n+1) + A]f_n(\vartheta, \varphi), \quad (\text{A.3})$$

wo der Operator A durch

$$A = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{A.4})$$

gegeben wird.

Gemäß (A.2) und (A.3) gilt somit angenähert

$$\Pi(P) = \frac{e^{ikr}}{r} \Phi, \quad (\text{A.5})$$

wo

$$\Phi = f_0(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{2ikr} Af_0(\vartheta, \varphi). \quad (\text{A.6})$$

Mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$\text{rot } \varphi v = \varphi \text{ rot } v + \text{grad } \varphi \times v \text{ und} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{grad } \varphi \psi = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi \quad (\text{A.8})$$

sowie auf die Tatsache, daß $\text{rot } \mathbf{r} = 0$ ist und

$$\text{grad } \frac{e^{ikr}}{r}$$

die Richtung des Vektors $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ hat, gilt nun wegen (A.5), (A.7) und (A.8)

$$\text{rot } (\mathbf{r}\Pi) = \text{grad } \left(\frac{e^{ikr}}{r} \Phi \right) \times \mathbf{r} = \frac{e^{ikr}}{r} \text{grad } \Phi \times \mathbf{r}. \quad (\text{A.9})$$

Nun ist aber gemäß (A.6) und (A.8)

$$\text{grad } \Phi = \text{grad } f_0(\vartheta, \varphi) - \mathbf{i}_r \frac{1}{2ikr^2} \Delta f_0(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{2ikr} \text{grad } [\Delta f_0(\vartheta, \varphi)]. \quad (\text{A.10})$$

Aus (A.9) und (A.10) ergibt sich aber

$$\text{rot } (\mathbf{r}\Pi) = \frac{e^{ikr}}{r} \left(\text{grad } f_0(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{2ikr} \text{grad } [\Delta f_0(\vartheta, \varphi)] \right) \times \mathbf{r}. \quad (\text{A.11})$$

Aus (A.11) folgt, daß die beiden ersten Glieder dieser asymptotischen Entwicklung des nach elektrischen Multipolfeldern entwickelbaren magnetischen Feldes (A.1) nur aus Transversalkomponenten bestehen.

Da der Gradientoperator durch

$$\text{grad} = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{i}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{A.12})$$

dargestellt wird, nimmt der Gradient einer Funktion der Winkel ϑ und φ also z. B. von $\text{grad } f_0(\vartheta, \varphi)$ im Unendlichen wie $1/r$ ab und hat eine transversale Richtung. Es verschwindet daher nach Ausführung der Vektormultiplikation mit \mathbf{r} das erste Glied der magnetischen Feldstärke rechts in (A.11) im Unendlichen wie $1/r$ und das zweite wie $1/r^2$.

Um das uns vor allem interessierende elektrische Feld $\mathbf{E}(P)$ (A.1) anzugeben, müssen wir noch die Rotation von (A.9) oder (A.11) berechnen. Gemäß (A.7) folgt aus (A.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(P) = \text{rot rot } (\mathbf{r}\Pi) &= \frac{e^{ikr}}{r} \text{rot } (\text{grad } \Phi \times \mathbf{r}) + \\ &+ \text{grad } \frac{e^{ikr}}{r} \times (\text{grad } \Phi \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Um $\mathbf{E}(P) = \text{rot rot } (\mathbf{r}\Pi)$ in der für unsere Überlegungen notwendigen Gestalt zu erhalten, soll zunächst das erste rechts in (A.13) auftretende Glied umgeformt werden. Gemäß der Vektorrelation

$$\text{rot } (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \text{ grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{w} + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{w} - \mathbf{w} \text{ div } \mathbf{v}$$

ist nun

$$\text{rot } (\text{grad } \Phi \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \text{ grad}) \text{grad } \Phi - [(\text{grad } \Phi) \text{grad}] \mathbf{r} + \text{grad } \Phi \text{ div } \mathbf{r} - \mathbf{r} \Delta \Phi. \quad (\text{A.14})$$

Die Berechnung des ersten Gliedes rechts in (A.14) erfordert einige Vorbereitung. Zunächst ist

$$r \operatorname{grad} \frac{1}{r^n} = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^n} = -\frac{n}{r^n}. \quad (\text{A.15})$$

Daher wird mit Rücksicht auf (A.12), da $f_0(\vartheta, \varphi)$ nur eine Winkelfunktion ist,

$$(r \operatorname{grad}) \operatorname{grad} f_0(\vartheta, \varphi) = r \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{grad} f_0(\vartheta, \varphi) = -\operatorname{grad} f_0(\vartheta, \varphi). \quad (\text{A.16})$$

Da wegen (A.8) und (A.15)

$$\operatorname{grad} \Phi = \operatorname{grad} f_0 - i_r \frac{1}{2ikr^2} \Delta f_0 + \frac{1}{2ikr} \operatorname{grad} \Delta f_0 \quad (\text{A.17})$$

ist, so erhalten wir gemäß (A.12), (A.15) und (A.16) für $(r \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \Phi$ den gesuchten Ausdruck

$$\begin{aligned} (r \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \Phi &= r \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{grad} \Phi = -\operatorname{grad} f_0 + i_r \frac{2}{2ikr^2} \Delta f_0 - \\ &- \frac{2}{2ikr} \operatorname{grad} \Delta f_0 = -2 \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{grad} f_0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Da

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta \quad (\text{A.19})$$

und $\Delta(1/r) = 0$ ist, so ist mit Rücksicht auf (A.4) und (A.6)

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \Delta f_0 + \frac{1}{2ikr^3} \Delta^2 f_0. \quad (\text{A.20})$$

Von den übrigen rechts in (A.14) auftretenden Gliedern ist $[(\operatorname{grad} \Phi) \operatorname{grad}] r = \operatorname{grad} \Phi$, $\operatorname{div} r = 3$, so daß wir für den ganzen Ausdruck (A.14) schließlich unter Verwendung von (A.18) erhalten

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \Phi \times r) = \operatorname{grad} f_0 - r \Delta \Phi. \quad (\text{A.21})$$

Um $E(P) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (r\Pi)$ (A.13) in der gewünschten Gestalt angeben zu können, muß noch das zweite Glied rechts in diesem Ausdruck umgeformt werden. Es gilt gemäß (A.17)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \frac{e^{ikr}}{r} \times (\operatorname{grad} \Phi \times r) &= \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(ik - \frac{1}{r} \right) r \times (\operatorname{grad} \Phi \times r) = \\ &= \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(ik - \frac{1}{r} \right) [r^2 \operatorname{grad} \Phi - r(r \operatorname{grad} \Phi)] = \\ &= \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \left[r^2 \operatorname{grad} \Phi + r \frac{1}{2ikr} \Delta f_0 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Im ganzen erhält man für das durch (A.13) gegebene elektrische Feld $E(P)$ (A.1) gemäß (A.20), (A.21) und (A.22) den nachstehenden asymptotischen Ausdruck

$$E(P) = \frac{e^{ikr}}{r} \left[\text{grad } f_0 - r \frac{1}{r^2} \left(Af_0 + \frac{1}{2ikr} A^2 f_0 \right) + \left(ik - \frac{1}{r} \right) \left(r \text{ grad } \Phi + r \frac{1}{2ikr^2} Af_0 \right) \right]. \quad (\text{A.23})$$

Dabei wird $\text{grad } \Phi$ durch (A.17) gegeben.

Um nachzuweisen, daß $E(P)$ (A.23) die Endlichkeitsbedingungen (3.8) bzw. (3.7) erfüllt, wollen wir zeigen, daß die in diesem Ausdruck enthaltenen Glieder, die in erster Näherung die vektoriellen Tangentialkomponenten $E_{\perp}(P)$ bzw. die Normalkomponente $E_n(P)$ darstellen, im Unendlichen wie $1/r$ bzw. wie $1/r^2$ verschwinden. Aus dem Ausdruck (A.23) für die elektrische Feldstärke $E(P)$ erhält man nämlich in erster Näherung

$$E_1(P) = E_{\perp}(P) = -ike^{ikr} \text{ grad } f_0(\vartheta, \varphi) \quad (\text{A.24})$$

sowie

$$E_2(P) = E_n(P) = -r \frac{e^{ikr}}{2r^3} Af_0(\vartheta, \varphi). \quad (\text{A.25})$$

$E_1(P)$ verschwindet im Unendlichen wie $1/r$ und stellt ein elektrisches Transversalfeld dar, da $\text{grad } f_0(\vartheta, \varphi)$ gemäß (A.12) nur i_{ϑ} und i_{φ} Komponenten besitzt.

$E_2(P)$ geht im Unendlichen wie $1/r^2$ gegen die Null und stellt ein elektrisches Feld von der Richtung des Vektors r dar, also ein longitudinales elektrisches Feld.

Nachwort

Zum Abschluß dieser Untersuchung mag noch bemerkt werden, daß bereits in der Arbeit aus dem Jahre 1971 die Behauptung aufgestellt wurde, daß die stärkeren Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen (1.2a) bis (1.2d) sowie die Bedingungen (1.1a) bis (1.1d) von elektromagnetischen Feldern erfüllt werden, die im Unendlichen nach elektrischen und magnetischen Multipolfeldern entwickelbar sind (Rubinowicz 1971). Da jedoch damals kein Beweis für diese Behauptung erbracht wurde, wares notwendig ihn jetzt nachzuholen.

LITERATURVERZEICHNIS

- Kottler, F., *Ann. Phys.* (Leipzig), (4), **71**, 457 (1923).
 Lorentz, H. A., *Ned. Akad. Wet., Verslag Afd. Natuurk.*, **4**, 176 (1896). (Abgedruckt in *Coll. Papers*, **3**, 1, Martinus Nijhof, The Hague 1936).
 Müller, Claus, *Abh. Deutsch. Akad. Berlin*, Nr. 3, 23 (1945/46).
 Müller, Claus, *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves*, Springer-Verl., Berlin-Heidelberg-New York 1969.
 Rubinowicz, A., *Acta Phys. Polon.*, **27**, 435 (1965).

- Rubinowicz, A., *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*, zweite Aufl., Springer-Verl., Berlin-Heidelberg-New York; Poln. Verl. Wiss., Warszawa 1966.
- Rubinowicz, A., *Rep. Math. Phys.*, **2**, 63 (1971).
- Rubinowicz, A., *Acta Phys. Polon.*, **A42**, 319 (1972).
- Saunders, W. K., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **38**, 342 (1952).
- Sommerfeld, A., *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. VI. *Partielle Differentialgleichungen der Physik*, Dieterichsche Verlagsbuchh., Wiesbaden 1947.