WELCHE FORMULIERUNGEN DES ELEKTROMAGNETISCHEN HUYGENSSCHEN PRINZIPS KÖNNEN ZUR ABLEITUNG DER ELEKTROMAGNETISCHEN AUSSTRAHLUNGSBEDINGUNGEN VERWENDET WERDEN?

Which Formulation of the Electromagnetic Huygens Principle Can Be Used for the Derivation of the Electromagnetic Radiation Conditions?

Von A. Rubinowicz*

Polnische Akademie der Wissenschaften

(Eingegangen am 14. März 1972)

Es wird darauf aufmerksam gemacht, daß alle durch eine Transformation des Lorentz-Huygensschen Prinzips entstehenden elektromagnetischen Huygensschen Prinzipe die vom Verfasser abgeleiteten schwächeren elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen ergeben müssen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß neben den Ausstrahlungsbedingungen gleichzeitig auch die Einschränkungen zu Tage treten, denen im Unendlichen die Darstellung der elektromagnetischen Felder unterliegt, die das verwendete transformierte Lorentz-Huygenssche Prinzip von den Funktionen fordert, die von ihm dargestellt werden. So erhält man im Falle der Kottlerschen Formulierung des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips außer den schwächeren Ausstrahlungsbedingungen noch die Bedingung, daß die Transversalkomponenten der elektromagnetischen Feldstärken im Unendlichen verschwinden müssen. Dies wird durch die Tatsache bedingt, daß bei der Ableitung der Kottlerschen Fassung das Lorentz-Huygenssche Prinzip mit Hilfe der elektromagnetischen Potentiale dargestellt wird, was ja den Geltungsbereich dieses Prinzips auf elektromagnetische Felder beschränkt, die im Unendlichen verschwinden. Im allgemeinen kann man nämlich behaupten: Das zur Ermittlung der Ausstrahlungsbedingungen verwendete Verfahren ergibt im Unendlichen nicht nur diese Bedingungen, sondern wird auch durch das asymptotische Verhalten der Funktionen bedingt, für die das benutzte Huygenssche Prinzip verwendbar ist.

1. Ableitung der elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen mit Hilfe des Lorentz--Huygensschen Prinzips

Elektromagnetische Ausstrahlungsbedingungen muß man verwenden, wenn man das Vorhandensein von elektromagnetischen Strahlungsquellen im Unendlichen ausschließen will. Dem Beispiel des Sommerfeldschen Vorgehens im skalaren Falle der Helmholtzschen Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

* Adresse des Verfassers: Warszawa, Hoża 74/4, Polen.

folgend, kann man dies mit Hilfe eines elektromagnetischen Huygensschen Prinzips erreichen. Wir müssen nur die Unendlichkeit mit Hilfe einer Fläche F_∞ umgeben und können dann die Strahlung einer beliebigen elektromagnetischen Strahlungsquelle in der Unendlichkeit mit Hilfe eines elektromagnetischen Huygensschen Prinzips darstellen, indem wir auf jedem einzelnen Flächenelement von F_∞ vollständig beliebige Randwerte einsetzen. Man muß jedoch dabei fordern, daß im elektromagnetischen Huygensschen Prinzip jedes einzelne Flächenelement df_Q auf der Fläche F_∞ einen Beitrag liefert, der eine von allen übrigen Flächenelementen df_Q von F_∞ unabhängige Lösung der Maxwellschen Gleichungen ist. Anderenfalls könnte das Integral über die Fläche F_∞ nicht die Strahlung einer ganz beliebigen, im Unendlichen befindlichen Strahlungsquelle darstellen.

Ein den obigen Anforderungen genügendes elektromagnetisches Huygenssches Prinzip wurde bereits im Jahre 1896 von H. A. Lorentz formuliert. Es hat die nachstehende prinzipiell sehr einfache Gestalt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(P) &= \int_F [\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{i}_e)+\boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{i}_m)]df_Q, \\ \boldsymbol{H}(P) &= \int_F [\boldsymbol{H}_e(\boldsymbol{i}_e)+\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{i}_m)]df_Q. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Hier ist F eine geschlossene Fläche mit der äußeren Normalen $\boldsymbol{n}$. Jedes einzelne Flächenelement df_Q der Fläche F ist mit elektrischen und magnetischen Dipolmomenten belegt, die durch die elektrischen bzw. magnetischen flächenhaften Ströme

$$\boldsymbol{i}_e(Q) = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{H}(Q)\times\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{i}_m(Q) = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(Q) \tag{1.2}$$

erzeugt werden. Die Dipolmomente haben daher auf der Fläche F nur Tangentialkomponenten und werden auch nur durch die Tangentialkomponenten der elektromagnetischen Feldstärken $\boldsymbol{E}(Q)$ und $\boldsymbol{H}(Q)$ erzeugt. Dabei bezeichnet Q einen Punkt auf der Fläche F, über die integriert wird, und P ist ein Beobachtungspunkt im Raume innerhalb der Fläche F.

Durch $\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{i}_e)\,df_Q$, $\boldsymbol{H}_e(\boldsymbol{i}_e)\,df_Q$ wird in (1.1) die elektromagnetische Strahlung eines auf dem Flächenelement df_Q befindlichen elektrischen Dipols, durch $\boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{i}_m)\,df_Q$, $\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{i}_m)\,df_Q$ die eines magnetischen Dipols dargestellt.

Das durch (1.1) und (1.2) definierte elektromagnetische Feld $\boldsymbol{E}(P)$ und $\boldsymbol{H}(P)$ wird demnach im Raume innerhalb der Fläche F durch eine Superposition von elektrischen und magnetischen Feldern gegeben, die durch elektrische und magnetische, auf der Fläche F befindliche Dipole erzeugt werden. Die Beiträge der einzelnen Flächenelemente df_Q von F sind demnach Lösungen von Maxwellschen Gleichungen und können daher als Huygens-Fresnelsche Elementarwellen aufgefaßt werden. Wir können demnach das durch (1.1) und (1.2) definierte Lorentz-Huygenssche Prinzip als ein echtes Huygenssches Prinzip ansehen.

Man muß bemerken, daß in der physikalischen Literatur eine ganze Reihe von elektromagnetischen Huygensschen Prinzipen angegeben wurde, die jedoch nicht als solche betrachtet werden können. Die Beiträge der einzelnen Flächenelemente sind nämlich in diesen sich Huygenssche nennenden Prinzipen im allgemeinen keine Lösungen der Maxwellschen Gleichungen, können also nicht als Huygens-Fresnelsche Elementarwellen aufgefaßt werden. Als ein Beispiel möge die von Tedone (1917) angegebene Formulierung des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips dienen.

Wenn die Körper und Lichtquellen, die in dem unendlichen Raume vorhanden sind, sich innerhalb einer geschlossenen Fläche F_0 befinden, die sich nicht ins Unendliche erstreckt, dann ziehen wir für die Ableitung der elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen einen Beobachtungspunkt P in dem Raume zwischen den beiden Flächen F_0 und F_∞ in Betracht. Wenn in dem Grenzfalle, wo F_∞ in die Unendlichkeit verschoben wird, das Integral über die Fläche F_∞ verschwindet, so ist damit die Anwesenheit von Lichtquellen im Unendlichen ausgeschlossen. In dieser Weise erhalten wir mit Hilfe des Lorentz-Huygensschen Prinzips die nachstehenden beiden Ausstrahlungsbedingungen (Rubinowicz 1971)

$$\lim_{r\to\infty} r(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_\perp) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} r(\boldsymbol{H}_\perp - \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_\perp) = 0. \tag{1.3}$$

Hier bezeichnen $\boldsymbol{E}_\perp$ und $\boldsymbol{H}_\perp$ die vektoriellen Tangentialkomponenten der elektromagnetischen Feldstärken $\boldsymbol{E}(Q)$ und $\boldsymbol{H}(Q)$ auf der Fläche F_∞.

Beachtenswert ist die Tatsache, daß wir auf diesem Wege keine Bedingungen erhalten, die im Falle der Helmholtzschen Differentialgleichung den Endlichkeitsbedingungen entsprechen. Es mag bemerkt werden, daß (1.3) eine schwächere Formulierung der elektromagnetischen Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen darstellt, die bisher allgemein im Gebrauch waren und die die nachstehende Gestalt haben (Claus Müller 1945/46, 1969)

$$\lim_{r\to\infty} r(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} r(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}) = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} r\,\boldsymbol{E} = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} r\,\boldsymbol{H} = 0. \tag{1.4}$$

Für mathematische Überlegungen, z. B. für die Durchführung des Eindeutigkeitsbeweises für ein elektromagnetisches Randwertproblem (Rubinowicz 1971) ist jedoch die schwächere Formulierung (1.3), vollständig hinreichend. Sie ist daher der älteren Formulierung (1.4), die überflüssige Forderungen enthält, stets vorzuziehen. Für einen näheren Vergleich der schwächeren Formulierung (1.3) mit der stärkeren (1.4) sei auf die Arbeit des Verfassers aus dem Jahre 1971 verwiesen. Hier sei nur noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen (1.4) auf Grund der Tedoneschen Fassung (Tedone 1917) abgeleitet wurden. Dieses ist jedoch eigentlich kein richtiges Huygenssches Prinzip, weil die Beiträge der einzelnen Flächenelemente in diesem Prinzip keine Lösungen der Maxwellschen Gleichungen sind. Sie können daher nicht als Huygens-Fresnelsche Elementarwellen interpretiert werden. Man kann also nicht behaupten, daß die Bedingungen (1.4) mathematisch oder physikalisch einwandfrei begründet sind.

2. *Ableitung der gleichen Ausstrahlungsbedingungen aus anderen Formulierungen des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips*

Nun kann man sich die Frage stellen, welche Ausstrahlungsbedingungen sich aus anderen Formulierungen des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips ergeben. In den folgenden Überlegungen wollen wir jedoch nur solche Huygenssche Prinzipe in Betracht ziehen, die aus dem Lorentz-Huygensschen Prinzip (1.1), (1.2) abgeleitet werden können. Es bestehen dann zwei Gruppen von solchen elektromagnetischen Huygensschen Prinzipen:

A) Solche, die nur durch Flächenintegrale über eine geschlossene Fläche F gegeben werden.

B) Solche, in denen außerdem auch Linienintegrale auf der geschlossenen Fläche F auftreten, wenn das elektromagnetische Feld auf F unstetig ist.

Triviale Beispiele für elektromagnetische Huygenssche Prinzipe, die zur Gruppe A gehören, erhält man, wenn man die Strahlung des Lorentz-Huygensschen Prinzips mit Hilfe eines elektrischen und eines magnetischen Hertzschen Vektors oder auch durch vier elektromagnetische Potentiale ausdrückt (vgl. z. B. Rubinowicz 1965, 1966).

Ein Beispiel für ein der Gruppe B angehöriges Huygenssches Prinzip wird durch eine Anwendung des Stokesschen Integralsatzes auf das Prinzip der Gruppe A erhalten, welches das elektromagnetische Feld mittels der elektromagnetischen Potentiale darstellt.

Die durch elektromagnetische Potentiale ausgedrückten Huygensschen Prinzipe der Gruppe A bzw. B wurden vom Verfasser gelegentlich als Umformung I bzw. II bezeichnet (Rubinowicz 1965; 1966, S. 248). Eine weitere Transformation der Umformung II liefert die bekannte Kottlersche Formulierung des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips, das ebenfalls zur Gruppe B gehört.

Da alle die erwähnten Huygensschen Prinzipe eine Umformung des elektromagnetischen Lorentz-Huygensschen Prinzips sind, ist er klar, daß sie die elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen (1.3) liefern müssen. Mit Ausnahme jedoch des in der Gruppe A erwähnten, durch elektromagnetische Potentiale ausgedrückten und als Umformung I bezeichneten Huygensschen Prinzips enthalten alle oben angeführten, zur Gruppe A oder B gehörigen Prinzipe außer den Tangentialkomponenten von $\boldsymbol{E}(Q)$ und $\boldsymbol{H}(Q)$ auch andere Komponenten und deren erste Ableitungen nach den einzelnen Richtungen. Diese Komponenten und ihre Ableitungen können jedoch durch die Tangentialkomponenten und ihre Ableitungen in tangentialen Richtungen ausgedrückt werden, wenn man sich der Maxwellschen Gleichungen bedient. Es ist daher ausreichend in allen Huygensschen Prinzipen der Gruppe A oder B nur die Tangentialkomponenten der elektromagnetischen Feldstärken $\boldsymbol{E}(Q)$ und $\boldsymbol{H}(Q)$ auf der Fläche F vorzuschreiben (Rubinowicz 1965; 1966, S. 248). Es muß daher möglich sein die Ausstrahlungsbedingungen (1.3) ausgehend von jeder Transformation des Lorentz-Huygensschen Prinzips zu erhalten. Selbstverständlich müssen jedoch die auf F vorgegebenen Werte der Komponenten von $\boldsymbol{E}(Q)$ und $\boldsymbol{H}(Q)$ sowie die Werte von ihren Ableitungen eindeutig die Tangentialkomponenten der elektromagnetischen Feldstärken auf F festlegen.

Wir sind daher zu dem Schlusse gelangt, daß wir prinzipiell jedes elektromagnetische

Huygenssche Prinzip, das aus dem Lorentz-Huygensschen Prinzip erhalten werden kann, zur Ableitung der elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen (1.3) verwenden können. Welche Schwierigkeiten dabei zu überwinden sind, wird sich jedoch ergeben, wenn wir die Kottlersche Fassung des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips in § 3 und die Umformungen II und I in § 4 in Betracht ziehen. Selbstverständlich wird man zur praktischen Ableitung der elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen diejenige Formulierung des Huygensschen Prinzips verwenden, die direkt und ohne irgendwelche Zusatzglieder die elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen in der einfachen Gestalt (1.3) liefert. Diese Gestalt wird durch das Lorentz-Huygenssche Prinzip (1.1), (1.2) gegeben.

3. Ableitung der elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen auf Grund der Kottlerschen Fassung des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips

Um in einem allgemein bekannten Spezialfall einen direkten Beweis für unsere Behauptung zu haben, daß jedes aus dem Lorentz-Huygensschen Prinzip ableitbare Huygenssche Prinzip zur Ermittlung der elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen (1.3) verwendet werden kann, wollen wir zeigen, daß dies im Falle der Kottlerschen Fassung dieses Prinzips zutrifft. Für die folgenden Überlegungen ist es bequem diese Formulierung für eine Fläche F mit einem Rand R anzugeben:

$$4\pi \boldsymbol{E}(P) = \iint\limits_F \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}(\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}_Q)\boldsymbol{E}(Q) - \boldsymbol{E}(Q)\,(\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}_Q)\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\right] df_Q -$$

$$- \frac{i}{k}\,\mathrm{grad}_P \int\limits_R \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \boldsymbol{H}(Q)\,d\boldsymbol{s} - \int\limits_R \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\, d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{E}(Q), \tag{3.1a}$$

$$4\pi \boldsymbol{H}(P) = \iint\limits_F \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}(\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}_Q)\boldsymbol{H}(Q) - \boldsymbol{H}(Q)\,(\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}_Q)\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\right] df_Q +$$

$$+ \frac{i}{k}\,\mathrm{grad}_P \int\limits_R \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \boldsymbol{E}(Q)\,d\boldsymbol{s} + \int\limits_R \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\, \boldsymbol{H}(Q) \times d\boldsymbol{s}. \tag{3.1b}$$

$\boldsymbol{E}(P)$ (3.1a) und $\boldsymbol{H}(P)$ (3.1b) sind sicherlich Lösungen der Maxwellschen Gleichungen, doch im allgemeinen nicht die Gleichen, die wir auf der Fläche F und ihrem Rande R vorschreiben. Wir nehmen ja doch an, daß die Fläche F einen Rand R besitzt und daß das elektromagnetische Feld $\boldsymbol{E}(Q)$ und $\boldsymbol{H}(Q)$ sonst auf der Fläche F stetig ist. Die Ausdrücke (3.1a) und (3.1b) sind daher nur Lösungen eines Sprungwertproblems. r_{PQ} bezeichnet hier die Entfernung des Beobachtungspunktes P von einem Punkte Q auf der Fläche F oder auf dem Rande R über die integriert wird. Der Umlaufssinn bei der Integration über den Rand R ist mit der Normalenrichtung $\boldsymbol{n}$ mit Hilfe der Rechtsschraubenregel gekoppelt, ebenso wie beim Stokesschen Integralsatz.

Um nicht gezwungen zu sein prinzipiell die gleichen Rechnungen zum zweiten Mal auszuführen, wollen wir uns im folgenden nur mit dem Kottlerschen Ausdruck (3.1a) für die elektrische Feldstärke $4\pi \boldsymbol{E}(P)$ beschäftigen. Wir bezeichnen im folgenden die drei rechterhand in (3.1a) auftretenden Integrale der Reihe nach mit I_0, I_1 und I_2.

In $\boldsymbol{I}_1$ und $\boldsymbol{I}_2$ stellen $\boldsymbol{E}(Q)$ und $\boldsymbol{H}(Q)$ an dem Rande R die Grenzwerte dieser Größen dar, wenn wir uns R auf der Fläche F nähern.

Zur Ableitung der elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen ziehen wir eine Kugelfläche F_∞ in Betracht mit dem Mittelpunkt im Beobachtungspunkte P. Wir bezeichnen diese Fläche mit dem unteren Index ∞, weil wir sie schließlich ins Unendliche verschieben werden. Wir teilen dann die Kugelfläche F_∞ in infinitesimale Flächenelemente df_Q von beliebiger Gestalt. Jedes solche Flächenelement strahlt eine elektromagnetische Strahlung aus, die selbstverständlich eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen ist. Um die Strahlung der Fläche F_∞ zu erhalten, hat man die Beiträge der einzelnen Flächenelemente df_Q zu summieren. Es genügt also, wenn wir vorläufig ein einzelnes Flächenelement df_Q von F_∞ in Betracht ziehen, wobei wir anzunehmen haben, daß es gemäß (3.1a) und (3.1b) strahlt. Um die Ausstrahlungsbedingungen zu erhalten muß dann F_∞ ins Unendliche verschoben werden.

Für jedes einzelne Flächenelement df_Q muß dabei nicht nur das Flächenintegral über df_Q sondern es müssen auch die Linienintegrale über dessen Berandung berechnet werden, um für die Strahlung von df_Q eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen zu erhalten, also die Existenz von Huygens-Fresnelschen Elementarwellen sicherzustellen. Wenn die Begrenzungen zweier aneinander stoßender df_Q nicht durch eine Kurve gehen, in der das elektromagnetische Feld unstetig wird, so heben sich die beiden Linienintegrale über die aneinander stoßenden Begrenzungen auf. Im ganzen erhalten wir somit ein elektromagnetisches Feld, das durch (3.1a) und (3.1b) gegeben wird, wo über die Fläche F, über den Rand R, sowie über die Kurven zu integrieren ist, in denen das elektromagnetische Feld unstetig wird.

Der Beitrag der Fläche des betrachteten Flächenelementes df_Q wird, analog wie im skalaren Falle der Helmholtzschen Gleichung, durch (vgl. etwa Rubinowicz 1966, S. 12)

$$d\boldsymbol{I}_0 = \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \left[\frac{\partial}{\partial n} \boldsymbol{E}(Q) - ik\boldsymbol{E}(Q) + \frac{1}{r_{PQ}} \boldsymbol{E}(Q) \right] r_{PQ}^2 d\omega \tag{3.2}$$

gegeben. Es ist nämlich $df_Q = r_{PQ}^2\, d\omega$, wo $d\omega$ den Raumwinkel bezeichnet, unter dem df_Q von dem Beobachtungspunkt P gesehen werden kann.

Um die elektromagnetische Strahlung eines Flächenelementes df_Q anzugeben, muß man jedoch, wie schon oben bemerkt wurde, nicht nur den Beitrag der Fläche df_Q in Betracht ziehen, sondern auch deren Berandung.

Die Integrationswege der zu df_Q gehörigen Linienintegrale $d\boldsymbol{I}_1$ und $d\boldsymbol{I}_2$ sind geschlossene Kurven. Sie werden nämlich durch die Begrenzung R des Flächenelementes df_Q gegeben. Um aus (3.1a) eine Ausstrahlungsbedingung zu erhalten, muß man diese Linienintegrale in Flächenintegrale transformieren. Man kann dies mit Hilfe bekannter Integralsätze erreichen. Auf das Integral in $d\boldsymbol{I}_1$ können wir den Stokesschen Integralsatz anwenden und erhalten dann mit Hilfe der Maxwellschen Gleichung

$$-ikE = \text{rot } H \tag{3.3}$$

sowie der Vektorrelation

$$\text{rot } fv = f \text{ rot } v + \text{grad } f \times v \tag{3.4}$$

den Ausdruck

$$dI_1 = -\frac{i}{k} \text{grad}_P \text{ rot}_{Qn} \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} H(Q) \right] df_Q =$$

$$= \left[ik \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} nE_n - \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}^2} nE_n \right] r_{PQ}^2 d\omega + a, \tag{3.5}$$

da im Falle der Kugelfläche F_∞

$$\text{grad}_P \, r_{PQ} = -n. \tag{3.6}$$

Hier ist

$$a = -\frac{i}{k} \text{grad}_P \left[\text{grad}_Q \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \times H(Q) \right] nr_{PQ}^2 d\omega.$$

Der in (3.5) auftretende Ausdruck a verschwindet jedoch, da ja $\text{grad}_Q \, [(\exp ikr_{PQ})/r_{PQ}]$ auf der Fläche F_∞ mit Rücksicht auf

$$\text{grad}_Q \, r_{PQ} = n \tag{3.7}$$

die Richtung der Normalen n an die Fläche F_∞ hat und deshalb die Normalkomponente des Vektorproduktes in der eckigen Klammer in a verschwindet.

Zur Transformation des Linienintegrals in I_2 in ein Flächenintegral verwenden wir die Beziehung (vgl. z. B. Rubinowicz 1966, S. 251)

$$\int_A [\text{grad}_Q(nv) - n \, \text{div}_Q \, v] \, df_Q = \int_B ds \times v, \tag{3.8}$$

die ein über ein ebenes Gebiet A erstrecktes Flächenintegral in ein Integral über dessen Berandung B überführt. Die Anwendung von (3.8) auf

$$v(Q) = \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} E(Q)$$

ergibt die Beziehung

$$dI_2 = -\left\{ \text{grad}_Q \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} E_n(Q) \right] - n \, \text{div}_Q \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} E(Q) \right] \right\} df_Q. \tag{3.9}$$

Durch Verwendung der Vektorformel (vgl. z. B. Rubinowicz 1966, S. 252)

$$\text{grad } (f \, nv) = f(n \text{ grad}) \, v + fn \times \text{rot } v + (nv) \text{ grad } f \tag{3.10}$$

erhalten wir mittels der Maxwellschen Gleichung

$$ik\,\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{E}$$

die Beziehung

$$\operatorname{grad}_Q \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} E_n\right] = \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{\partial}{\partial n} \boldsymbol{E} + ik \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H} +$$

$$+ \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \left(ik - \frac{1}{r_{PQ}}\right) \boldsymbol{E}_n(Q). \tag{3.11}$$

Schließlich folgt aus der Vektorrelation

$$\operatorname{div}\,(f\boldsymbol{v}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \operatorname{grad} f$$

mit Rücksicht auf (3.7) und auf

$$\operatorname{div}_Q \boldsymbol{E}(Q) = 0$$

die Beziehung

$$\operatorname{div}_Q \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \boldsymbol{E}(Q)\right] = \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \left(ik - \frac{1}{r_{PQ}}\right) E_n(Q). \tag{3.12}$$

Aus den Gleichungen (3.2), (3.5), (3.9), (3.11) und (3.12) ergibt sich somit die Gleichung

$$d\boldsymbol{I}_0 + d\boldsymbol{I}_1 + d\boldsymbol{I}_2 = e^{ikr_{PQ}}[-ikr_{PQ}(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_\perp) + \boldsymbol{E}_\perp]d\omega. \tag{3.13}$$

$\boldsymbol{E}_\perp$ und $\boldsymbol{H}_\perp$ bezeichnen hier die vektoriellen Tangentialkomponenten an die Fläche F_∞ der elektromagnetischen Feldstärke $\boldsymbol{E}(Q)$ und $\boldsymbol{H}(Q)$.

Um die elektromagnetischen Ausstrahlungsbedingungen zu erhalten, müssen wir fordern, daß das vom Flächenelement df_Q der Fläche F_∞ ausgestrahlte elektrische Feld (3.13) verschwindet, wenn die Fläche F_∞ ins Unendliche verschoben wird. Dies findet statt wenn

$$\lim_{r_{PQ}\to\infty} r_{PQ}\,(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_\perp) = 0 \tag{3.14a}$$

und

$$\lim_{r_{PQ}\to\infty} \boldsymbol{E}_\perp = 0 \tag{3.14b}$$

ist. Eine analoge Rechnung für das magnetische Feld $\boldsymbol{H}(P)$ (3.1b) ergibt die beiden Bedingungen

$$\lim_{r_{PQ}\to\infty} r_{PQ}(\boldsymbol{H}_\perp - \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_\perp) = 0 \tag{3.15a}$$

und

$$\lim_{r_{PQ}\to\infty} \boldsymbol{H}_{\perp} = 0. \tag{3.15b}$$

Es ist jedoch nicht notwendig die entsprechenden Rechnungen durchzuführen, um die Ausstrahlungsbedingung (3.15a) zu erhalten. Eine Vektormultiplikation von (3.14a) mit der Normalen $\boldsymbol{n}$ liefert ja nämlich die Ausstrahlungsbedingung (3.15a).

Die Bedingungen (3.14a) und (3.15a) sind identisch mit den schwächeren Ausstrahlungsbedingungen (1.3), die mit Hilfe des Lorentz-Huygensschen Prinzips sich ergeben. Dies stimmt vollkommen mit unseren Erwartungen überein.

Eine Erklärung für die Tatsache, daß außer den Ausstrahlungsbedingungen (1.3) die Bedingungen (3.14b) und (3.15b) auftreten, werden wir im nachfolgenden Paragraphen geben. Vorläufig wollen wir bemerken, daß wir zur Umformung des Kottlerschen Integrals (3.1a) uns des Stokesschen Integralsatzes, des Integralsatzes (3.8) und auch der Beziehung (3.10) bedient haben, also von Sätzen Gebrauch gemacht haben, die bei der Ableitung der Kottlerschen Fassung des Huygensschen Prinzips verwendet werden (vgl. etwa Rubinowicz 1966, S. 251 ff.). Man kann somit die Ansicht vertreten, daß wir in gewisser Weise die Operationen, die vom Lorentz-Huygensschen Prinzip zur Kottlerschen Fassung führen, wieder wenigstens teilweise rückgängig gemacht haben.

4. Warum fordert die Kottlersche Fassung des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips bei der Ableitung der Ausstrahlungsbedingungen auch das Verschwinden der elektromagnetischen Feldstärken im Unendlichen?

Um die im Titel des laufenden Paragraphen gestellte Frage zu beantworten, genügt es darauf hinzuweisen, daß bei der Kottlerschen Fassung des elektromagnetischen Huygensschen Prinzips (vgl. etwa Rubinowicz 1966, S. 251 ff.) nicht die ursprüngliche Fassung des Lorentz-Huygensschen Prinzips verwendet wird, sondern eine solche in der es durch elektromagnetische Potentiale dargestellt wird. Dadurch wird aber der Anwendungsbereich des Lorentz-Huygensschen Prinzips auf elektromagnetische Felder beschränkt, die im Unendlichen verschwinden. Dies ist ja doch eine Eigenschaft, die alle durch elektromagnetische Potentiale darstellbaren Felder aufweisen. Bei der Ableitung der Ausstrahlungsbedingungen treten dann diese Beschränkungen zum Vorschein.

Um dies durch Rechnung zu beweisen, stellen wir das elektromagnetische Feld des Lorentz-Huygensschen Prinzips in der Form dar (vgl. Rubinowicz 1966, S. 244 f.)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(P) &= -\mathrm{grad}_P\, \varphi(P) + ik\, \boldsymbol{A}(P) - \mathrm{rot}_P\, \boldsymbol{B}(P), \\ \boldsymbol{H}(P) &= -\mathrm{grad}_P\, \psi(P) + ik\boldsymbol{B}(P) + \mathrm{rot}_P\, \boldsymbol{A}(P), \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei das skalare Potential $\varphi(P)$ durch

$$4\pi\varphi(P) = -\int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} E_n(Q)df_Q + \frac{i}{k}\int_R \frac{e^{ikr_{PR}}}{r_{PQ}} \boldsymbol{H}(Q)d\boldsymbol{s} \tag{4.2}$$

und die Vektorpotentiale $\boldsymbol{A}(P)$ und $\boldsymbol{B}(P)$ durch

$$4\pi \boldsymbol{A}(P) = \int\limits_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \boldsymbol{H}(Q) \times \boldsymbol{n} df_Q, \tag{4.3a}$$

$$4\pi \boldsymbol{B}(P) = \int\limits_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(Q) df_Q \tag{4.3b}$$

gegeben werden.

Durch einen analogen Ausdruck wie (4.2) wird das magnetische skalare Potential $\psi(P)$ dargestellt.

Das in dem Ausdruck (4.2) für das skalare Potential $\varphi(P)$ auftretende Linienintegral über den Rand R der Fläche F

$$I(P) = \frac{i}{k} \int\limits_R \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \boldsymbol{H}(Q) d\boldsymbol{s} \tag{4.4}$$

kann mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes, der Maxwellschen Gleichung (3.3) sowie der Vektorrelation (3.4) in der nachstehenden Weise umgeformt werden

$$I(P) = \frac{i}{k} \int\limits_F \mathrm{rot}_{Qn} \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \boldsymbol{H}(Q) \right] df_Q =$$

$$= \frac{i}{k} \int\limits_F \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \mathrm{rot}_Q \boldsymbol{H}(Q) + \mathrm{grad}_Q \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \times \boldsymbol{H}(Q) \right] \boldsymbol{n} df_Q =$$

$$= \int\limits_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} E_n(Q) df_Q. \tag{4.5}$$

Um den Ausdruck (3.7) für die Normale $\boldsymbol{n}$ anwenden zu können, setzen wir von nun ab voraus, daß F einen Teil einer Kugelfläche F_∞ mit dem Beobachtungspunkt P als Mittelpunkt darstellt. Die Bedingung (3.7) ist ja doch nur für eine solche Kugelfläche verwendbar. Der im Integranden in der eckigen Klammer auftretende Gradient hat ja dann gemäß (3.7) die Richtung der Normalen $\boldsymbol{n}$ und es verschwindet daher das mit der Normalen $\boldsymbol{n}$ skalar multiplizierte Vektorprodukt im Integranden des vorletzten Integrals in (4.5).

Die Flächen F sollen ferner so gewählt werden, daß die Kurven auf F_∞, in denen das elektromagnetische Feld unstetig wird, alle zu ihren Begrenzungen gehören. Innerhalb der Flächen F soll daher das elektromagnetische Feld stetig sein.

Mit Rücksicht auf (4.2), (4.4) und (4.5) ist

$$\varphi(P) = 0. \tag{4.6}$$

Zur Angabe von $\boldsymbol{E}(P)$ (4.1) muß noch $\text{rot}_P\, \boldsymbol{B}(P)$ ermittelt werden. Aus (4.3b), (3.4) und (3.6) ergibt sich

$$-4\pi\, \text{rot}_P\, \boldsymbol{B}(P) = \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \left(ik - \frac{1}{r_{PQ}}\right) \boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(Q)]\, df_Q =$$

$$= - \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \left(ik - \frac{1}{r_{PQ}}\right) \boldsymbol{E}_\perp(Q)\, df_Q. \tag{4.7}$$

Im ganzen erhalten wir für $\boldsymbol{E}(P)$ (4.1) aus (4.6), (4.3a) sowie (4.7) den Ausdruck

$$4\pi \boldsymbol{E}(P) = \int_F \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \left\{ ik[\boldsymbol{H}(Q) \times \boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}_\perp(Q)] + \frac{1}{r_{PQ}} \boldsymbol{E}_\perp(Q) \right\} df_Q. \tag{4.8}$$

Eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden des Ausdruckes (4.8), wenn die einen Teil einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkt im Beobachtungspunkt P bildende Fläche F ins Unendliche verschoben wird, stellen die Bedingungen (3.14a) und (3.14b) dar. Damit wurde der Nachweis erbracht, daß schon die Darstellung des Lorentz-Huygensschen Prinzips mit Hilfe der elektromagnetischen Potentiale das Auftreten der Bedingung (3.14b) zur Folge hat. Wie schon erwähnt, hat diese Bedingung mit der Ausstrahlungsbedingung nichts zu tun. Sie ist lediglich ein Ausdruck für die Tatsache, daß die Anwendung der elektromagnetischen Potentiale den Anwendungsbereich des Lorentz-Huygensschen Prinzips einschränkt. Bekanntlich muß ja jedes elektromagnetische Feld, das durch elektromagnetische Potentiale darstellbar ist, im Unendlichen verschwinden. Dies muß also auch ein durch ein Lorentz-Huygenssches Prinzip darstellbares elektromagnetisches Feld tun, wenn zu der Darstellung dieses Prinzips elektromagnetische Potentiale verwendet werden.

Wir haben uns bei den oben durchgeführten Überlegungen einer Fassung des Lorentz-Huygensschen Prinzips bedient, die, wie schon oben erwähnt wurde, vom Verfasser gelegentlich als Umformung II (vgl. Rubinowicz 1966, S. 248) bezeichnet wurde. Sie unterscheidet sich von der Umformung I benannten nur durch den Ausdruck für das skalare Potential, der in der Umformung I z. B. durch (vgl. Rubinowicz 1966, S. 245)

$$4\pi\varphi(P) = \frac{i}{k} \int_F \left[\text{grad}_Q \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \times \boldsymbol{H}(Q) \right] \boldsymbol{n}\, df_Q \tag{4.9}$$

gegeben wird und der in den Ausdruck (4.2) transformiert werden kann. Daß (4.9) verschwindet, wenn F einen Teil einer F_∞ Kugelfläche darstellt, ist ja auf Grund von (3.7) unmittelbar ersichtlich. Trotzdem haben wir den komplizierteren Beweis mit dem Ausdruck (4.2) für das Potential $\varphi(P)$ durchgeführt, weil dieser Ausdruck bei der Ableitung der Kottlerschen Fassung des Huygensschen Prinzips verwendet wird. Daß wir mit dem Potential $\varphi(P)$ (4.9) den gleichen Ausdruck (4.8) für das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(P)$ erhalten, ist klar, da er ja doch, wie aus (4.1) ersichtlich ist, wegen $\varphi(P) = 0$ nur aus den Vektorpotentialen $\boldsymbol{A}(P)$ und $\boldsymbol{B}(P)$, (4.3a) bzw. (4.3b), entsteht und diese in den Umformungen I und II die gleichen sind.

5. *Verallgemeinerungen*

Das Ergebnis der obigen Überlegungen läßt sich leicht auf alle Gebiete der Physik verallgemeinern, in denen man aus einem Huygensschen Prinzip Ausstrahlungsbedingungen ableiten will. Man muß nämlich bedenken, daß das zur Ableitung dieser Bedingungen angewendete Verfahren Bedingungen für das gesamte Verhalten der Funktionen bei Nichtvorhandensein von Strahlungsquellen im Unendlichen liefert, für die das gegebene Huygenssche Prinzip verwendbar ist. Man muß daher erwarten, daß neben den Ausstrahlungs- und eventuell auch Endlichkeitsbedingungen auch die Bedingungen sich ergeben werden, die die Funktionen zu erfüllen haben auf die das gegebene Huygenssche Prinzip anwendbar ist. Man muß daher zur Ableitung der der Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingungen eine Formulierung des Huygensschen Prinzips wählen, die keine besonderen Anforderungen an das Verhalten der Funtionen, auf die es angewendet wird, stellt. Bei einem Versuch einer Trennung der Ausstrahlungsbedingungen von den Bedingungen, die das Verhalten der zulässigen Funktionen im Unendlichen charakterisieren, kann man ja auf Schwierigkeiten stoßen. Man müßte ja eine Methode zur Verfügung haben, die es gestattet herauszufinden, welcher Anteil der erhaltenen Bedingungen der Ausstrahlungsbedingung zuzuschreiben ist und welcher von dem asymptotischen Verhalten der Funktionen herrührt, das von dem verwendeten Huygensschen Prinzip gefordert wird. Wie ein solches Verfahren beschaffen ist und wie es zu verwenden wäre ist jedoch bisher nicht untersucht worden.

Für zahlreiche Gespräche über Themen, die mit der obigen Arbeit im Zusammenhang stehen, möchte ich den Herren Dozenten Dr. habil. A. Kujawski und J. Petykiewicz sowie Herrn Dr. K. Gniadek meinen herzlichsten Dank aussprechen.

LITERATURVERZEICHNIS

Kottler, F., *Ann. Phys.* (Leipzig) (4), **71**, 457 (1923).

Lorentz, H. A., *Nederl. Akad. Wet.*, *Verslag Afd. Natuurk.*, **4**, 176 (1896) (abgedruck in *Coll. Papers*, **3**, 1, Martinus Nijhof, The Hague 1936).

Müller, Cl., *Abh. Deutsch. Akad. Berlin*, Nr. 3, 23 (1945/46).

Müller, Cl., *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves*, Springer-Verl., Berlin–Heidelberg–New York 1969.

Rubinowicz, A., *Acta Phys. Polon.*, **27**, 435 (1965).

Rubinowicz, A., *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*, zweite Aufl., Springer Verl., Berlin–Heidelberg–New York; Poln. Verl. Wiss., Warszawa 1966.

Rubinowicz, A., *Rep. Math. Phys.* **2**, 63 (1971).

Tedone, O., *Atti acad. naz. Lincei, Rend.*, ser. 5, **26**, 286 (1917).