Vol. A39 (1971) ACTA PHYSICA POLONICA Fasc. 4

KANN DIE BEUGUNGSWELLE IN DER KIRCHHOFFSCHEN THEORIE DER BEUGUNG STETS IM SINNE DER YOUNGSCHEN ANSCHAUUNGEN GEDEUTET WERDEN?

Is it Always Possible to Interpret the Diffraction Wave in Kirchhoff's Theory in Conformity with Young's Views?

Von A. Rubinowicz*

Polnische Akademie der Wissenschaften

(*Eingegangen am 6. November 1970*)

Die von punktförmigen Lichtquellen ausgestrahlten einfallenden Lichtwellen erzeugen gemäß der Kirchhoffschen Theorie der Beugung Beugungswellen, die im Sinne der Youngschen Anschauungen über die Entstehung der Beugungserscheinungen durch eine Zerstreuung der einfallenden Lichtwelle am beugenden Rande gedeutet werden können. Dies ist im allgemeinen nicht mehr möglich im Falle anderer einfallender Lichtwellen, da ja dann, wie Miyamoto und Wolf gezeigt haben, die Beugungswelle von den Werten der einfallenden Welle abhängt, die sich auf einer ins Unendliche erstreckenden Halbgeraden befinden. Man kann jedoch jede Lösung der Schwingungsgleichung, also auch die einfallende Lichtwelle, durch eine Superposition von homogenen und inhomogenen ebenen Wellen darstellen. Da mit diesen ebenen Wellen Beugungswellen verknüpft sind, die im Sinne der Youngschen Anschauungen interpretiert werden können, erhält man durch eine Superposition der Beugungswellen der einzelnen ebenen Wellen eine Youngsche Beugungswelle. Diese ist jedoch nicht identisch mit der Miyamoto-Wolfschen. Die Schattengrenzen, der zu den einzelnen homogenen ebenen Wellen gehörigen Beugungswellen, erfüllen nämlich im allgemeinen den ganzen physikalischen Raum.

1. *Problemstellung*

Um die im Titel der vorliegenden Mitteilung gestellten Frage zu beantworten, ob die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung stets im Sinne der Youngschen Anschauungen gedeutet werden kann, setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß das Licht durch eine Wellenbewegung gegeben wird, die durch eine Lösung der skalaren Schwingungsgleichung

$$\Delta u+k^2u=0 \tag{1.1}$$

* Adresse des Verfassers: Warszawa, Hoża 74/4, Polen.

dargestellt wird. Wird die einfallende Lichtwelle im Falle einer Beugungserscheinung durch eine divergierende oder konvergierende Kugelwelle oder auch durch eine ebene Welle gegeben, so kann man die durch den Kirchhoffschen Ansatz dargestellte Wellenbewegung in eine geometrisch-optische und eine Beugungswelle aufspalten (Rubinowicz 1917, 1938, 1966). Im Falle wo die einfallende Lichtwelle durch eine divergierende Kugelwelle oder durch eine ebene Welle dargestellt wird, wird die geometrisch-optische Wellenbewegung durch die einfallende Lichtwelle in allen Raumpunkten gegeben, in denen Licht gemäß den Forderungen der geometrischen Optik vorhanden ist. Im Falle einer konvergierenden Kugelwelle ist das nicht mehr der Fall. Hier besteht die geometrisch-optische Wellenbewegung aus einer konvergierenden Kugelwelle, die nach dem Durchgang durch den Brennpunkt in eine divergierende Kugelwelle übergeht.

In der Kirchhoffschen Theorie wird die Beugungswelle $u_B(P)$ in allen drei, oben angeführten Fällen durch ein über den beugenden Rand B erstrecktes Integral

$$u_B(P) = \int_B \boldsymbol{W}(P, Q) \boldsymbol{ds}_Q \tag{1.2}$$

gegeben, wo $\boldsymbol{W}(P, Q)$ das Vektorpotential eines quellenfreien Vektorfeldes darstellt, das durch

$$\boldsymbol{V}(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \operatorname{grad}_Q u(Q) - u(Q) \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \right] \tag{1.3}$$

definiert wird, wo $u(Q)$ die einfallende Lichtwelle bedeutet. Es besteht somit die Beziehung

$$\boldsymbol{V}(P, Q) = \operatorname{rot}_Q \boldsymbol{W}(P, Q). \tag{1.4}$$

Da $\boldsymbol{W}(P, Q)$ in den drei betrachteten Fällen nur von der einfallenden Lichtwelle $u(Q)$ in dem Punkte Q des beugenden Randes abhängt, kann man sich vorstellen, daß $u_B(P)$ (1.2) durch eine Zerstreuung der einfallenden Lichtwelle an den einzelnen Elementen des beugenden Randes entsteht (Rubinowicz 1917, 1938). Der gleiche Tatbestand tritt auch in Erscheinung, falls die einfallende Welle einer skalaren punktförmigen Dipol- oder Quadrupollichtquelle entstammt (Petykiewicz 1965a und b). Auf Grund der angeführten Arbeiten von Petykiewicz kann man wohl annehmen, daß dies auch für alle skalaren punktförmigen Multipollichtquellen aller noch höheren Ordnungen zutrifft.

Miyamoto und Wolf (1962a und b; vgl. auch Rubinowicz 1965, 1966) haben sodann gezeigt, daß man, auch im Falle einer viele Spezialfälle umfassenden Klasse von einfallenden Lichtwellen, die Kirchhoffsche Wellenbewegung in eine geometrisch-optische und eine Beugungswelle aufspalten kann. Man kann jedoch in diesem Falle im allgemeinen sich nicht vorstellen, daß die Beugungswelle durch eine Zerstreuung der einfallenden Lichtwelle durch die einzelnen Elemente des beugenden Randes erzeugt wird, wie man dies in Anlehnung an die Youngschen Anschauungen erwarten könnte. Young hat sich nämlich auf die Betrachtung des Falles beschränkt, wo die einfallende Lichtwelle durch eine isotrope punktförmige Lichtquelle erzeugt wird. Die Forderung, daß die Beugungswelle auch im Falle einer beliebigen einfallenden Welle durch eine Zerstreuung dieser Welle am beugenden

Rande gegeben wird, stellt somit eine Extrapolation der Youngschen Anschauungen dar. Für die folgenden Überlegungen wird es sich als bequem erweisen, von einer Youngschen Beugungswelle zu sprechen, wenn man annehmen kann, daß sie durch eine Zerstreuung des einfallenden Lichtes am beugenden Rande entsteht.

Die Beugungswelle, die durch das Miyamoto-Wolfsche Vektorpotential gegeben wird, entspricht jedoch, wie bereits oben erwähnt wurde, nicht den Youngschen Anforderungen. Im Falle, wo die einfallende Lichtwelle $u(Q)$ im Unendlichen die Sommerfeldsche Ausstrahlungs- und Endlichkeitsbedingung erfüllt, wird nämlich das Miyamoto-Wolfsche Vektorpotential durch

$$\boldsymbol{W}_{MW}(PQ) = \boldsymbol{i}_r \times \frac{1}{4\pi} \int_{r_{PQ}}^{+\infty} e^{ikr_{PQ'}} \operatorname{grad}_{Q'} u(Q') dr_{PQ'} \tag{1.5}$$

gegeben. Hier bedeutet $\boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{r}_{PQ}/r_{PQ}$ den Einheitsvektor in der Richtung des Vektors $\boldsymbol{r}_{PQ}$. Die Integration ist über einen Halbstrahl $[P, Q]$ zu erstrecken, der in dem Punkte Q beginnt und in der Richtung der Fortsetzung des Vektors $\boldsymbol{r}_{PQ}$ verläuft.

Im Falle, wo das Vektorpotential durch (1.5) dargestellt wird, wollen wir von einer Miyamoto-Wolfschen Beugungswelle sprechen. Damit eine solche Beugungswelle im Sinne der Youngschen Anschauungen gedeutet werden kann, müßte man das Integral (1.5) über die oben angegebene Halbgerade $[P, Q]$ mit Hilfe einer Integration durch einen Ausdruck darstellen können, der nur von der Wellenbewegung in dem Punkte Q des beugenden Randes abhängt. Dies konnte man bisher nur in den oben angegebenen Fällen durchführen, in denen die einfallende Lichtwelle durch eine sphärische oder ebene Welle gegeben wird.

Dieses Scheitern der Integrationsversuche können wir zum Anlaß nehmen, um einen anderen Weg einzuschlagen. Gemäß (1.2) werden die Eigenschaften der Beugungswelle durch das Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P, Q)$ bestimmt. Nun ist aber das Vektorpotential eines quellenfreien Vektorfeldes, also z. B. von $\boldsymbol{V}(P, Q)$ (1.3) nicht eindeutig gegeben, sondern wird nur bis auf den Gradienten einer eindeutigen skalaren Funktion festgelegt. In der vorliegenden Mitteilung wollen wir uns daher die Frage stellen, ob man nicht durch eine entsprechende Wahl des Vektorpotentials auf Grund von (1.2) eine Beugungswelle erhalten kann, die auch im Falle beliebiger einfallender Wellen den Youngschen Anschauungen entspricht, von der man also annehmen kann, daß sie durch eine Zerstreuung der einfallenden Welle am beugenden Rande entsteht.

Daß dies in der Tat möglich ist, kann man sich in der nachstehenden Weise klar machen: Im allgemeinen kann man jede einfallende Lichtwelle (vgl. Rubinowicz 1957, S. 198) durch eine Superposition von homogenen und inhomogenen ebenen Wellen erzeugen. Da die bekannten Vektorpotentiale für diese ebenen Wellen Youngsche Beugungswellen (1.2) ergeben, so kann man, auch im Falle beliebiger einfallender Lichtwellen durch eine Superposition von Vektorpotentialen dieser ebenen Wellen, Vektorpotentiale erhalten, die gemäß (1.2) Youngsche Beugungswellen darstellen. Im folgenden sollen die Eigenschaften dieser Vektorpotentiale und der durch sie erzeugten Beugungswellen näher untersucht werden.

2. Darstellung des Feldes einer beliebigen Lösung der Schwingungsgleichung

Um das in § 1 angegebene Programm durchführen zu können, wollen wir zunächst an eine bekannte Darstellung (vgl. z. B. Wolf 1959) einer beliebigen Lösung der Schwingungsgleichung (1.1) mit Hilfe des Fourierschen Integralsatzes erinnern. Es gilt nämlich das nachstehende Paar von Beziehungen

$$u(x, y, z) = k^2 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) e^{ik(\xi x + \eta y + \sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\, z)} \, d\xi d\eta, \tag{2.1}$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x', y', 0) e^{-ik(\xi x' + \eta y')} dx' dy'. \tag{2.2}$$

Dieses Gleichungspaar stellt nämlich die Lösung der nachstehenden Randwertaufgabe dar:

In dem durch die Ebene $z = 0$ begrenzten Halbraum, in dem $z \geqslant 0$ ist, wird eine Lösung der Schwingungsgleichung (1.1) gesucht die in diesem Halbraum im allgemeinen regulär ist und die in der $z = 0$-Ebene beliebige, durch $u(x, y, 0)$ gegebene Werte annimmt. Im Unendlichen des $z \geqslant 0$-Halbraumes erfüllt die Lösung des in Rede stehenden Randwertproblems die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung.

Daß (2.1) im allgemeinen regulär ist und eine Lösung der Schwingungsgleichung (1.1) darstellt, kann man unmittelbar verifizieren.

Daß die Lösung (2.1) und (2.2) der Schwingungsgleichung in der $z = 0$-Ebene die vorgegebenen Randwerte annimmt, stellt man fest indem man $F(\xi, \eta)$ (2.2) in (2.1) einsetzt. Man erhält dann nämlich im Falle $z = 0$ den Fourierschen Integralsatz für $u(x, y, 0)$. Damit dies möglich ist, muß man selbstverständlich annehmen, daß $u(x, y, 0)$ als Funktion von x und y den üblichen Voraussetzungen für die Geltung des Fourierschen Integralsatzes genügt. Wir können daher z. B. fordern, daß $u(x, y, 0)$ in der ganzen x, y-Ebene die Dirichletschen Bedingungen befriedigt und die Integrale

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x, y, 0)| dx \quad \text{und} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x, y, 0)| dy$$

konvergieren.

Wir müssen noch den Nachweis erbringen, daß die durch (2.1) und (2.2) gegebene Lösung des Randwertproblems im Unendlichen die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Die Lösung des betrachteten Randwertproblems kann man nämlich nach Sommerfeld (vgl. Rubinowicz 1917, 1966; Sommerfeld 1959) auch mit Hilfe einer bekannten, übrigens durch das Spiegelungsverfahren leicht angebbaren Greenschen Funktion für einen durch eine Ebene begrenzten Halbraum herstellen. Da diese Lösung eindeutig festgelegt ist, kann man mit Recht vermuten, daß man auf beiden Wegen zu der gleichen Lösung gelangt. Daß dies in der Tat der Fall ist, kann man aus einer Mitteilung von É. Durand (1948) entnehmen. Er hat nämlich gezeigt, wie man die durch (2.1) und (2.2) gegebene Lösung des betrachteten Randwertproblems in eine Gestalt transformieren kann, in der sie durch die entsprechende Greensche Funktion gegeben wird. Aus der Lösung des betrachteten Randwertproblems, die mit Hilfe einer Greenschen Funktion erhalten wird, kann man aber unmittelbar entnehmen, daß diese Lösung, und somit auch die durch (2.1) und (2.2) gegebene, im Unendlichen der Sommerfeldschen Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung genügt.

Durch (2.1) wird die Lösung der Schwingungsgleichung (1.1) durch eine Superposition von homogenen und inhomogenen ebenen Wellen dargestellt. Im Falle $\xi^2+\eta^2 \leqslant 1$, wo also der Punkt ξ, η innerhalb des Einheitskreises

$$\xi^2+\eta^2 = 1 \tag{2.3}$$

liegt, erfüllen ξ, η und

$$\zeta = \sqrt{1-\xi^2-\eta^2} \tag{2.4}$$

die Beziehung $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$ und können daher als die Richtungskosinusse der in der durch den Einheitsvektor

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{i}\xi+\boldsymbol{j}\eta+\boldsymbol{k}\zeta \tag{2.5}$$

gegebenen Richtung fortschreitenden homogenen ebenen Wellen

$$e^{ik(\xi x+\eta y+\zeta z)}$$

gedeutet werden.

Im folgenden soll zunächst ζ als reell und zwar als positiv vorausgesetzt werden, damit die ebene Welle eine Fortschreitungsrichtung in den Halbraum $z \geqslant 0$ hinein besitzt. Die Amplituden und Phasen der ebenen Wellen werden durch die Funktion $F(\xi, \eta)$ (2.2) bestimmt.

Ist jedoch $\xi^2+\eta^2 > 1$, so wird ζ (2.4) imaginär. Wir können dann ζ gleich

$$\zeta = i\zeta_0, \quad \zeta_0 = \underset{+}{\sqrt{\xi^2+\eta^2-1}} \tag{2.6}$$

setzen, wo ζ_0 reell und zwar positiv ist. In (2.1) treten daher inhomogene Wellen auf, die durch

$$e^{ik(\xi x+\eta y+i\zeta_0 z)} = e^{-k\zeta_0 z} e^{ik(\xi x+\eta y)} \tag{2.7}$$

gegeben werden. Ihre Amplitudenfaktoren $\exp(-k\zeta_0 z)$ erfahren daher beim Fortschreiten in der positiven z-Richtung, also in den betrachteten Halbraum hinein, eine exponentielle Dämpfung. Ihre Ausbreitungsrichtung befindet sich in der x, y-Ebene und wird durch die Richtung des Vektors $\boldsymbol{i}\xi+\boldsymbol{j}\eta$ gegeben. In dieser Richtung pflanzt sich nämlich nicht nur die Phase der inhomogenen Welle (2.7) fort, sondern es findet in dieser Richtung auch der zeitlich mittlere Energiefluß statt. Stellt man nämlich eine Lösung der Schwingungsgleichung (1.1) in der Gestalt $u = U\exp(i\vartheta)$ dar, wo U und ϑ reelle Funktionen sind, so wird nach Braunbek (1951) der mittlere Energiefluß durch

$$\boldsymbol{S} = \frac{\omega}{2} U^2 \operatorname{grad} \vartheta$$

gegeben. Im Falle der inhomogenen ebenen Welle (2.7) wird somit mit Rücksicht auf $k = \omega/c$

$$\boldsymbol{S} = \frac{\omega^2}{2c} e^{-2k\zeta_0 z}(\boldsymbol{i}\xi + \boldsymbol{j}\eta). \tag{2.8}$$

Die Wellenlänge λ der homogenen Wellen ist konstant und wird durch $\lambda = 2\pi/k$ dargestellt. Bezeichnet $\varrho = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$ die Entfernung eines Punktes in der ξ, η-Ebene vom Koordinatenursprung dieser Ebene, so wird die Wellenlänge λ' der inhomogenen Wellen durch $\lambda' = \lambda/\varrho$ bestimmt. Befindet sich der Punkt ξ, η auf dem Einheitskreis (2.3), wo $\varrho = 1$ ist, so besitzen die inhomogenen ebenen Wellen die gleiche Wellenlänge wie die homogenen. Die Wellenlängen λ' der inhomogenen Wellen schließen sich somit, wenn der Punkt ξ, η den Einheitskreis (2.3) überschreitet, stetig an die Wellenlänge λ der homogenen Wellen an. Mit größer werdender Entfernung ϱ wird jedoch die Wellenlänge der inhomogenen Wellen kleiner und erreicht im Grenzfalle $\varrho \to \infty$ einen verschwindenden Grenzwert. Das in der Darstellung (2.1) und (2.2) des behandelten Randwertproblems auftretende Wellenlängenspektrum der homogenen und inhomogenen ebenen Wellen erstreckt sich somit von der durch $k = 2\pi/\lambda$ gegebenen Wellenlänge λ der homogenen ebenen Wellen bis zu verschwindend kleinen Wellenlängen.

Wie aus (2.6) und (2.7) oder auch aus (2.8) zu entnehmen ist, besitzen die inhomogenen Wellen der ξ, η-Werte, die auf dem Einheitskreis (2.3) liegen, eine verschwindende Dämpfung beim Fortschreiten in der Richtung der positiven z-Achse. Sie haben somit für $\varrho = 1$ eine unendlich große Reichweite. Mit größer werdendem ϱ wächst jedoch die Dämpfung und wird im Grenzfalle $\varrho \to \infty$ unendlich.

3. Vektorpotentiale homogener und inhomogener ebener Wellen

Um die durch (2.1) und (2.2) gegebene Lösung einer Randwertaufgabe im Gebiete der Schwingungsgleichung für die Zwecke einer Kirchhoffschen Beugungstheorie zu verwenden, setzen wir voraus, daß der beugende Schirm eben ist und sich in der x, y-Ebene befindet. Wir nehmen dabei an, daß die einfallende Lichtwelle aus dem $z < 0$-Halbraum einfällt und wir die Beugungserscheinung in dem physikalischen $z \geqslant 0$-Halbraum beobachten. Wir können dann in der beugenden Öffnung für $u(x', y', 0)$ die Werte für die einfallende Lichtwelle verwenden und auf dem beugenden Schirm $u(x', y', 0) = 0$ setzen. Wir erhalten auf diese Weise die Darstellung einer Beugungserscheinung, die man passend als eine Sommerfeld-Kirchhoffsche bezeichnen kann. Sommerfeld (vgl. Rubinowicz 1917, 1966; Sommerfeld 1959) hat nämlich als erster in seinen Optikvorlesungen für das gleiche Beugungsproblem einen Ansatz mit Hilfe einer Greenschen Funktion für den Halbraum angegeben. Freilich erhält man dann nicht die exakte Lösung eines Beugungsproblems, weil die auf dem angegebenen Wege erhaltene Darstellung der Sommerfeld-Kirchhoffschen Wellenbewegung in der beugenden Öffnung die Werte annimmt, die hier von der einfallenden Lichtwelle für $u(Q)$ vorgegeben werden. Wenn wir daher in den folgenden Betrachtungen unseren Überlegungen die Lösung des durch (2.1) und (2.2) gegebenen Randwertproblems zugrunde legen, so beschäftigen wir uns mit dem Ansatz einer

Sommerfeld-Kirchhoffschen Beugungstheorie in dem Falle, wo in der beugenden Öffnung die Wellenbewegung ganz exakt mit der durch die einfallende Lichtwelle gegebenen übereinstimmt und auf dem beugenden Schirm im physikalischen Halbraum die Randbedingung $u = 0$ erfüllt ist.

Um die diesem Ansatz entsprechende Beugungswelle zu beschreiben, genügt es gemäß (1.2) das der einfallenden Lichtwelle entsprechende Vektorpotential anzugeben. Um den Voraussetzungen der ins Auge gefaßten Sommerfeld- Kirchhoffschen Beugungstheorie zu entsprechen muß man für das Vektorpotential einen Ausdruck zur Verfügung haben, der so beschaffen ist, daß auf dem beugenden Schirm die Beugungswelle und daher gemäß (1.2) auch das Vektorpotential verschwindet. Im Schattenraum ist nämlich keine geometrisch-optische Wellenbewegung vorhanden, so daß hier die gesamte Wellenbewegung nur durch die Beugungswelle gegeben wird. Ein, einer solchen Beugungswelle entsprechendes Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ wird durch die Differenz zweier Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}(P, Q)$ und $\boldsymbol{W}(P', Q)$ gegeben, so daß

$$\boldsymbol{W}^*(P, Q) = \boldsymbol{W}(P, Q) - \boldsymbol{W}(P', Q) \tag{3.1}$$

ist. $\boldsymbol{W}(P', Q)$ stellt dann das Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P, Q)$ für einen Punkt P' dar, der zum Beobachtungspunkt P spiegelbildlich in bezug auf die den physikalischen Halbraum $z \geqslant 0$ begrenzende Ebene $z = 0$ gelegen ist. Man erkennt, daß $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ (3.1) verschwindet, wenn der Punkt P in die Ebene $z = 0$ rückt. Gleichzeitig mit P rückt nämlich auch der Punkt P' in diese Ebene, so daß $\boldsymbol{W}(P, Q) = \boldsymbol{W}(P', Q)$ wird und daher gemäß (3.1) das Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ gleich Null wird. Mit Rücksicht auf den Zusammenhang (1.2) zwischen dem Vektorpotential und der Beugungswelle bedeutet dies aber ein Verschwinden der letzteren.

Es handelt sich nun darum die Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}(P, Q)$ und $\boldsymbol{W}(P', Q)$ anzugeben. Da wir diese Vektorpotentiale aus den Vektorpotentialen der homogenen und inhomogenen ebenen Wellen aufbauen wollen, müssen wir zunächst diese speziellen Vektorpotentiale zur Verfügung haben.

Zunächst soll das Vektorpotential einer homogenen ebenen Welle angegeben werden. Es kann aus den Ausdruck (1.2) für die entsprechende Beugungswelle (Rubinowicz 1917, 1966) entnommen werden und hat die Gestalt

$$\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}) = -\frac{1}{4\pi} e^{ik\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{OQ}} \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \frac{\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r}_{PQ}}{r_{PQ} + \boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{PQ}}. \tag{3.2}$$

Hier stellt O einen fixen Punkt im Raume dar, der den Anfangspunkt des Vektors $\boldsymbol{r}_{OQ}$ mit den Komponenten x, y, z bildet. Ferner bedeutet $\boldsymbol{e}$ den durch (2.4) und (2.5) gegebenen reellen Einheitsvektor in der Fortschreitungsrichtung der einfallenden ebenen Welle.

Das Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ (3.2) wird unendlich, falls der in diesem Ausdruck auftretende Nenner $r_{PQ} + \boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{PQ}$ verschwindet, d. h. falls $r_{PQ} = -\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{QP}$ wird. Von dem Vektor $\boldsymbol{r}_{PQ}$ unterscheidet sich dabei der Vektor $\boldsymbol{r}_{QP}$ durch den entgegengesetzten Richtungssinn. Dieser Tatbestand hat zur Folge, daß die Beugungswelle (1.2) auf einer zylindrischen Fläche sich singulär verhält, deren Erzeugende durch Halbgerade von der Richtung der Vektoren $\boldsymbol{r}_{QP}$ gegeben werden, die ihren Ursprung in den einzelnen Punkten Q des beugenden Randes haben und zur Einfallsrichtung $\boldsymbol{e}$ der einfallenden homogenen ebenen Lichtwelle gleichsinnig parallel sind. Gleichzeitig mit dem Nenner $r_{PQ}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{PQ}$ verschwindet das Vektorprodukt $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r}_{PQ}$ im Zähler des in (3.2) auftretenden Bruches, jedoch schwächer als der angeführte Nenner (Rubinowicz 1917, 1966), so daß im ganzen (3.2) bei verschwin dendem $r_{PQ}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{PQ}$ dennoch unendlich wird.

Das Vektorpotential der in (2.1) auftretenden inhomogenen ebenen Wellen wird ebenfalls durch (3.2) dargestellt; nur muß man dann statt $\boldsymbol{e}$ den komplexen Einheitsvektor

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}_r + i\boldsymbol{e}_i \tag{3.3}$$

verwenden, damit die in (3.2) auftretende ebene Welle $\exp(ik\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{OQ})$ mit der inhomogenen Welle (2.7) übereinstimmt. Man muß dann

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{i}\xi + \boldsymbol{j}\eta,\ \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{k}\zeta_0 \tag{3.4}$$

setzen, wo ζ_0 durch (2.6) gegeben wird. Es liegt dann $\boldsymbol{e}_r$ in der x, y-Ebene und $\boldsymbol{e}_i$ hat die Richtung der Normalen an diese Ebene. Damit der Nenner $r_{PQ}+\boldsymbol{e}'\boldsymbol{r}_{PQ}$ in (3.2) verschwindet, müssen dann die beiden Bedingungen

$$r_{PQ}+\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{r}_{PQ} = 0, \quad \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{r}_{PQ} = 0 \tag{3.5}$$

erfüllt sein. Im folgenden werden wir jedoch voraussetzen müssen, daß Q ein Punkt des beugenden Randes ist, also in der x, y-Ebene liegt. Die zweite Bedingung in (3.5) besagt dann, daß der Vektor $\boldsymbol{r}_{QP} = -\boldsymbol{r}_{PQ}$ und daher auch der Punkt P in der x, y-Ebene sich befindet und die erste bedeutet, daß $\boldsymbol{r}_{QP}$ die gleiche Richtung und den gleichen Richtungssinn wie der Vektor $\boldsymbol{e}_r$ besitzt. Die Fläche in der das Vektorpotential (3.2) für eine in (2.1) auftretende inhomogene ebene Welle unendlich wird, wird somit durch die Schar der Halbgeraden gegeben mit dem Ursprung in der beugenden Kante und der Richtung und dem Richtungssinn von $\boldsymbol{e}_r$ (3.4). Sie befindet sich somit in der x, y-Ebene.

Es muß jedoch bemerkt werden, daß im Falle ebener inhomogener Wellen der Zähler $\boldsymbol{e}'\times\boldsymbol{r}_{PQ}$ des Bruches im Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}')$ nicht verschwindet, so daß das, durch das Verschwinden des Nenners $r_{PQ}+\boldsymbol{e}'\boldsymbol{r}_{PQ}$ bewirkte, Unendlichwerden des Vektorpotentials in der Schattengrenze nicht gemildert wird. Es ist nämlich $\boldsymbol{e}'\times\boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{r}_{PQ} + i\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{r}_{PQ}$. Da $\boldsymbol{r}_{PQ}$ in der x, y-Ebene liegt und antiparallel zu $\boldsymbol{e}_r$ ist, so ist zwar $\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{r}_{PQ} = 0$, es ist jedoch $|\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{r}_{PQ}| = |\boldsymbol{e}_i|\, r_{PQ} \neq 0$, da $\boldsymbol{e}_i$ die Richtung der Normalen an die x, y-Ebene besitzt.

Das zum Spiegelbild P' des Beobachtungspunktes P gehörige Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e})$ unterscheidet sich von dem Vektorpotential (3.2) nur dadurch, daß in (3.2) der Punkt P durch sein Spiegelbild P' ersetzt ist.

Die Differenz der beiden Vektorpotentiale für eine homogene ebene Welle

$$\boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{W}(P', Q, O; \boldsymbol{e}) \tag{3.6}$$

verschwindet, wenn der Beobachtungspunkt P in die den physikalischen Halbraum $z \geqslant 0$ begrenzende Ebene $z = 0$ hineinrückt. Dies hat zur Folge, daß die gemäß (1.2) zu dem Vektorpotential (3.6) gehörige Beugungswelle in der $z = 0$-Ebene verschwindet.

Im Falle inhomogener ebener Wellen ist in (3.6) der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ (2.5) durch den durch (3.3) und (3.4) definierten Einheitsvektor $\boldsymbol{e}'$ zu ersetzen, so daß man erhält

$$\boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e}') = \boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}') - \boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e}'). \tag{3.7}$$

4. *Vektorpotentiale im Falle beliebiger einfallender Lichtwellen*

Da wir gemäß (2.1) und (2.2) die Wellenbewegung im Falle beliebiger Lösungen der Schwingungsgleichung durch eine Superposition von homogenen und inhomogenen ebenen Wellen herstellen können und gemäß (3.6) und (3.7) über die zu diesen ebenen Wellen gehörigen Vektorpotentiale verfügen, können wir nun eine Darstellung der Vektorpotentiale (3.1) im Falle ebener Schirme und beliebiger Lösungen der Schwingungsgleichung angeben. Der Übersichtlichkeit wegen, wollen wir die Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}_h^*(P, Q)$ bzw. $\boldsymbol{W}_i^*(P, Q)$, in denen homogene bzw. inhomogene ebene Wellen auftreten, gesondert betrachten.

Wir bezeichnen daher mit $F_h(\xi, \eta)$ eine Funktion von ξ und η, die innerhalb des Einheitskreises (2.3) der durch (2.2) definierten Funktion $F(\xi, \eta)$ gleich ist, außerhalb dieses Einheitskreises jedoch verschwindet. Ebenso soll $F_i(\xi, \eta)$ außerhalb des Einheitskreises (2.3) gleich $F(\xi, \eta)$ sein, innerhalb dieses Einheitskreises jedoch verschwinden.

Das Vektorpotential $\boldsymbol{W}_h^*(P, Q)$, das aus den Vektorpotentialen der homogenen ebenen Wellen besteht, wird erhalten, wenn wir in (2.1) die homogene ebene Welle $\exp(ik(\xi x + \eta y + \sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\, z))$ durch das Vektorpotential (3.6) für homogene ebene Wellen ersetzen und statt $F(\xi, \eta)$ nun $F_h(\xi, \eta)$ verwenden. Auf diese Weise ergibt sich

$$\boldsymbol{W}_h^*(P, Q) = k^2 \int_E F_h(\xi, \eta)\, \boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e}) d\xi d\eta. \tag{4.1}$$

Hier bedeutet $\boldsymbol{e}$ den durch (2.5) definierten reellen Einheitsvektor. Die Integrationsvariablen ξ, η treten in $\boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ nur in dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ auf. Die Integration ist in (4.1) in der ξ, η-Ebene über das durch den Einheitskreis (2.3) begrenzte Gebiet E durchzuführen.

Um das Vektorpotential $\boldsymbol{W}_i^*(P, Q)$ der inhomogenen ebenen Wellen anzugeben, hat man in (2.1) anstatt der homogenen ebenen Wellen das Vektorpotential (3.7) für den Fall inhomogener ebener Wellen einzuführen und statt $F(\xi, \eta)$ nun $F_i(\xi, \eta)$ zu benützen. Man erhält demnach

$$\boldsymbol{W}_i^*(P, Q) = k^2 \int_{(E)} F_i(\xi, \eta) \boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e}')\, d\xi d\eta. \tag{4.2}$$

Statt des reellen Einheitsvektors $\boldsymbol{e}$ (2.5) ist in (4.2) der komplexe $\boldsymbol{e}'$ (3.3) mit den Komponenten (3.4) zu verwenden. Hier bedeutet (E) daß man die Integration in der ξ, η-Ebene über das Gebiet außerhalb des Einheitskreises (2.3) zu erstrecken hat.

Die Integranden der Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}_h^*(P, Q)$ (4.1) bzw. $\boldsymbol{W}_i^*(P, Q)$ (4.2) sind als Funktionen von P und Q im allgemeinen regulär, bis auf gewisse Unendlichkeitsstellen. Diese werden für solche ξ, η-Werte gegeben, für die $\boldsymbol{e}$ (2.5) bzw. $\boldsymbol{e}_r$ (3.4) die Richtung des Vektors $\boldsymbol{r}_{PQ}$ oder $\boldsymbol{r}_{P'Q}$, jedoch einen entgegengesetzten Richtungssinn hat. In diesem Falle verschwinden nämlich in der Vektorfunktion $\boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ bzw. $\boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e}')$, die im Integranden in (4.1) bzw. in (4.2) auftritt, die Nenner $r_{PQ} + \boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{PQ}$ und $r_{P'Q} + \boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{P'Q}$ bzw. $r_{PQ} + \boldsymbol{e}'\boldsymbol{r}_{PQ}$ und $r_{P'Q} + \boldsymbol{e}'\boldsymbol{r}_{P'Q}$.

Das gesamte Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ wird durch die Summe der beiden Vektorpotentiale (4.1) und (4.2) gegeben

$$\boldsymbol{W}^*(P, Q) = \boldsymbol{W}_h^*(P, Q) + \boldsymbol{W}_i^*(P, Q). \tag{4.3}$$

Wenn man das durch (4.3) definierte Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ mit dem Miyamoto-Wolfschen vergleichen will, so kann man nicht behaupten, daß der Ausdruck (4.3) die gleiche Wellenbewegung darstellt, wie das Miyamoto-Wolfschen Vektorpotential (1.5). Um einen solchen Vergleich durchführen zu können, muß man ein Miyamoto-Wolfsches Vektorpotential zur Verfügung haben, das in der Schirmebene $z = 0$ verschwindet. Ein solches Miyamoto-Wolfsches Vektorpotential wird offenbar auf Grund des Ausdruckes (1.5) für $\boldsymbol{W}_{MW}(P, Q)$ durch

$$\boldsymbol{W}_{MW}^*(P, Q) = \boldsymbol{W}_{MW}(P, Q) - \boldsymbol{W}_{MW}(P', Q) \tag{4.4}$$

dargestellt, wo P' den Punkt bezeichnet, der zum Punkte P in bezug auf die den physikalischen Halbraum $z \geqslant 0$ begrenzende Ebene $z = 0$ spiegelbildlich gelegen ist.

Im allgemeinen kann man nur erwarten, daß die Vektorpotentiale (4.3) und (4.4) sich nur durch den Gradienten einer eindeutigen skalaren Funktion voneinander unterscheiden. Das würde zutreffen, falls $\boldsymbol{W}_{MW}(P, Q)$ (1.5) und der Bestandteil von $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ (4.3), der erhalten wird falls in (4.1) und (4.2) statt der Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ und $\boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e}')$ die Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ (3.2) und $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}')$ verwendet werden, sich in dieser Weise unterscheiden würden. Miyamoto und Wolf haben zwar zum Ausgangspunkt ihrer Betrachtungen ein Vektorpotential gewählt, das durch eine gemäß (2.1) und (2.2) erfolgende Superposition von zu ebenen Wellen gehörigen Vektorpotentialen erhalten wird; sie haben jedoch dieses Vektorpotential nicht durch eine Transformation in das von ihnen angegebene übergeführt. Sie zeigten nämlich nur, daß ein bestimmter Bestandteil dieses Vektorpotentials einer gewissen Differentialgleichung genügt und haben dann durch eine Integration dieser Gleichung ihren Ausdruck $\boldsymbol{W}_{MW}(P, Q)$ (1.5) für das Vektorpotential erhalten. Im Anhang wird gezeigt, daß durch die Rotation der beiden oben angeführten Vektorpotentiale tatsächlich das gleiche quellenfreie Vektorfeld dargestellt wird und daher beide Vektorpotentiale die gleiche Beugungswelle (1.2) beschreiben. Ob diese beiden Vektorpotentiale einander gleich sind, wird dort nicht entschieden, da dies für unsere weiteren Überlegungen nur von untergeordneter Bedeutung ist.

Die Flächen, in denen das Vektorpotential im Falle einfallender homogener oder inhomogener ebener Wellen unendlich wird, bilden sie Schattengrenzen, die die geometrisch-optische Wellenbewegung der ebenen Wellen begrenzen.

Wenn $F_h(\xi, \eta)$ im Einheitskreis (2.3) nirgends verschwindet, was im allgemeinen der Fall sein wird, so treten in dem Anteil der Beugungswelle, der gemäß durch (1.2) und (4.1) durch

$$u_{Bh}(P) = \int_B \boldsymbol{W}_h^*(P, Q)\, \boldsymbol{ds}_Q \tag{4.5}$$

gegeben wird, zylindrische Schattengrenzen der einzelnen homogenen ebenen Wellen auf, deren Erzeugende in der Regel alle möglichen Richtungen in den physikalischen Halbraum

$z \geqslant 0$ hinein besitzen. Es werden dann keine Gebiete in diesem Halbraum vorhanden sein, die von zylindrischen Schattengrenzen frei sind, in denen also nur eine geometrisch-optische Wellenbewegung und eine Beugungswelle auftritt.

Falls man, was wohl nur in einem Ausnahmefall zutreffen wird, die Integration in (4.1) nur über einen bestimmten Bereich innerhalb des Einheitskreises (2.3) in der ξ, η-Ebene durchzuführen hat, wird man in einem Teilgebiet des Halbraumes $z \geqslant 0$ eine Aufspaltung der Wellenbewegung in eine geometrisch-optische und eine Beugungswelle durchführen können. Verschwindet nämlich die Funktion $F_h(\xi, \eta)$ in einem bestimmten Bereich innerhalb des Einheitskreises (2.3), so werden im Integranden in (4.5) keine Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}_h^*(P, Q)$ (4.1) auftreten, die Schattengrenzen von gewissen Raumrichtungen besitzen. Es werden dann im physikalischen Halbraum positiver z-Werte Gebiete vorhanden sein, in denen man eine geometrisch-optische und eine Beugungswelle unterscheiden kann.

Der Beitrag

$$u_{Bi}(P) = \int\limits_B \boldsymbol{W}_i^*(P, Q)\, \boldsymbol{ds}_Q \tag{4.6}$$

zur gesamten Beugungswelle enthält nur Schattengrenzen der inhomogenen ebenen Wellen, die in der x, y-Ebene verlaufen. Diese Schattengrenzen machen sich daher im Halbraum positiver z-Werte nicht bemerkbar. Die Beugungswelle (4.6) hat somit in dem ganzen physikalischen Halbraum einen stetigen Verlauf. Ihre Amplitude nimmt, ebenso wie die der inhomogenen ebenen Wellen (2.7), mit wachsenden z-Werten ab. Und zwar findet das Abnehmen des Integranden in $\boldsymbol{W}_i^*(P, Q)$ (4.2) umso langsamer statt, je kleiner ζ_0 (2.6) ist, d. h. je näher der betreffende Punkt in der ξ, η-Ebene an dem Einheitskreis (2.3) sich befindet. Die zu solchen inhomogenen ebenen Wellen gehörigen Vektorpotentiale und auch die ihnen entsprechenden Anteile zur gesamten Beugungswelle haben somit die größten Reichweiten.

Bezüglich der geometrisch-optischen Wellenbewegung der betrachteten Lösung des Sommerfeld-Kirchhoffschen Beugungsproblems für einen ebenen beugenden Schirm ist nachstehendes zu bemerken. Im Falle, wo eine homogene ebene Welle einfällt, liegen die singulären Punkte Q des Vektorpotentials $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ (3.2) für einen gegebenen Beobachtungspunkt P in dem durch

$$\boldsymbol{r}_{PQ} = -\boldsymbol{e} r_{PQ} \tag{4.7}$$

gegebenen Halbstrahl, wo $\boldsymbol{e}$, wie immer, die Fortschreitungsrichtung der einfallenden ebenen Welle bezeichnet. Nur für solche Punkte Q verschwindet nämlich der in (3.2) auftretende Nenner $r_{PQ} + \boldsymbol{e}\,\boldsymbol{r}_{PQ}$. Eine geometrisch-optische Wellenbewegung ist dann in dem Beobachtungspunkte P vorhanden, wenn der Halbstrahl (4.7) durch die beugende Öffnung hindurchgeht (vgl. Rubinowicz 1966, S. 86).

Im Falle einer inhomogenen einfallenden ebenen Welle ist in $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ (3.2) der reelle Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ durch den komplexen $\boldsymbol{e}'$ zu ersetzen. Es wird dann dieses Vektorpotential, wie in § 3 gezeigt wurde, nur für Beobachtungspunkte P unendlich die in der x, y-Ebene liegen.

Befindet sich somit der Beobachtungspunkt P nicht in der x, y-Ebene, so erzeugen nur die homogenen ebenen Wellen in der beugenden Öffnung singuläre Punkte des Vektorpotentials $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ (3.2) deren Einfallsrichtungen $\boldsymbol{e}$ Halbstrahlen (4.7) ergeben, die Durchstoßpunkte Q mit der beugenden Öffnung haben. Daraus folgt, daß für Beobachtungspunkte P außerhalb der x, y-Ebene alle Punkte der beugenden Öffnung singuläre Punkte der Beiträge von $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ zum Vektorpotential $\boldsymbol{W}_h(P, Q)$ (4.1) sein müssen. Im Vektorpotential $\boldsymbol{W}_i(P, Q)$ (4.2) ergibt das Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}')$ für solche Beobachtungspunkte P keine singulären Punkte in der beugenden Öffnung, also auch keine Beiträge zur geometrisch-optischen Wellenbewegung. Im allgemeinen wird somit in jedem Beobachtungspunkte P in dem Halbraum positiver z-Werte zugleich mit der Beugungswelle auch eine geometrisch-optische, durch das Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ verursachte Wellenbewegung vorhanden sein. Die gesamte Wellenbewegung, die von $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ (3.2) und $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}')$ herrührt, wird in einem Beobachtungspunkte P durch die Summe aus der geometrisch-optischen und der Beugungswelle gegeben.

Analoge Überlegungen lassen sich durchführen im Falle der Beiträge von $\boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e})$ und $\boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e}')$ zu den Integranden in den Integralen (4.1) bzw. (4.2). Damit eine Schattengrenze im physikalischen Halbraum positiver z-Werte auftreten kann, müßte $r_{P'Q}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{P'Q}=0$ oder $r_{P'Q}+\boldsymbol{e}'\boldsymbol{r}_{P'Q}=0$ sein, je nachdem der Punkt ξ, η sich innerhalb oder außerhalb des Einheitskreises (2.3) befindet. Diese Bedingungen können jedoch nicht erfüllt werden.

Da sowohl der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ als auch die Vektoren $\boldsymbol{r}_{P'Q}$ für einen im $z<0$-Halbraum liegenden Punkt P' die Richtung aus dem Halbraum negativer in den positiver z-Werte haben, kann nämlich die Beziehung $r_{P'Q}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{P'Q}=0$ für keine durch einen reellen Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ gegebene Einfallsrichtung der ebenen Wellen bestehen. Damit eine solche Bedingung erfüllt ist, müßten nämlich die Vektoren $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{r}_{P'Q}$ antiparallel sein. Es können somit im physikalischen Halbraum keine Schattengrenzen durch die ebenen Wellen mit dem Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e})$ verursacht werden. Es treten daher hier nur Beugungswellen auf, die im ganzen physikalischen Halbraum stetig sind. Geometrisch-optische Wellenbewegungen, die diesem Vektorpotential entsprechen, sind daher im physikalischen Halbraum nicht vorhanden.

Die Schattengrenzen der Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e}')$, der zum Spiegelbild P' des Beobachtungspunktes P gehörigen inhomogenen ebenen Wellen, befinden sich ebenfalls in der x, y-Ebene.

Zusammenfassend können wir daher feststellen: Das Vektorpotential ebener Wellen $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ (3.2) bedingt im physikalischen Halbraum das Auftreten von Schattengrenzen und daher auch von Beugungswellen und geometrisch-optischen Wellenbewegungen. Das Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e})$ erzeugt hier nur stetige Beugungswellen. Die Schattengrenzen der beiden Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}')$ und $\boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e}')$ befinden sich in der x, y-Ebene. Durch sie werden daher ebenfalls nur stetige Beugungswellen im physikalischen Halbraum $z>0$ verursacht.

Ein anderes Bild der Wellenbewegung erhalten wir dagegen im Falle der durch das Vektorpotential (4.4)

$$\boldsymbol{W}^*_{MW}(P, Q) = \boldsymbol{W}_{MW}(P, Q) - \boldsymbol{W}_{MW}(P', Q)$$

dargestellten Miyamoto-Wolfschen Beugungserscheinungen. Die Schattengrenzen der durch $\boldsymbol{W}_{MW}(P, Q)$ (1.5) beschriebenen Wellenbewegung befinden sich in den Beobachtungspunkten P, für die der in § 1 definierte Halbstrahl $[P, Q]$ für einen in der Beugungsöffnung liegenden Punkt Q durch eine singuläre Stelle der einfallenden Lichtwelle $u(Q)$ hindurchgeht. In diesem Falle wird nämlich der Miyamoto-Wolfsche Ausdruck für das Vektorpotential $\boldsymbol{W}_{MW}(P, Q)$ (1.5) unendlich. Und zwar erhalten wir eine scharfe Schattengrenze, wenn $u(Q)$ eine punktförmige singuläre Stelle besitzt. Sonst treten nur verwaschene Schattengrenzen auf.

Das Vektorpotential $\boldsymbol{W}_{MW}(P', Q)$ erzeugt im physikalischen Halbraum nur eine stetige Beugungswelle, wenn man voraussetzt, was gewöhnlich der Fall ist, daß die singulären Stellen der einfallenden Lichtwelle sich im Halbraum negativer z-Werte befinden. Der Halbstrahl $[P', Q]$ beginnt nämlich in einem Punkte Q der x, y-Ebene und verläuft dann im physikalischen Halbraum. Er kann somit durch keine singulären Stellen der einfallenden Lichtwelle $u(Q)$ hindurchgeben.

Im Falle der Miyamoto-Wolfschen Wellenbewegung bedingt somit nur der Beitrag $\boldsymbol{W}_{MW}(P, Q)$ (1.5) zum gesamten Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*_{MW}(P, Q)$ (4.4) ein Auftreten von scharfen oder verwaschenen Schattengrenzen im physikalischen Halbraum.

Aus den obigen Überlegungen folgt eindeutig, daß das Miyamoto-Wolfsche Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*_{MW}(P, Q)$ (4.4) und das durch (4.1), (4.2) und (4.3) dargestellte, die die gleiche durch einen Sommerfeld-Kirchhoffschen Ansatz gegebene Wellenbewegung beschreiben, nicht die gleiche Struktur besitzen. Beide beschreiben jedoch vollständig getreu und identisch die durch den entsprechenden Ansatz gegebene Sommerfeld-Kirchhoffsche Wellenbewegung. Insofern sind diese beiden Vektorpotentiale als gleichberechtigt anzusehen. In den beiden betrachteten Fällen treten jedoch verschiedene Beugungswellen auf. Im Falle Miyamoto-Wolfscher Beugungswellen kann man im allgemeinen nicht behaupten, wie bereits in § 1 angegeben wurde, daß die Beugungswelle durch eine Zerstreuung der einfallenden Lichtwelle im Sinne der Youngschen Anschauungen entsteht. Man kann jedoch annehmen, daß eine solche Zerstreuung in dem Falle vorhanden ist, wo das Vektorpotential durch (4.1), (4.2) und (4.3) dargestellt wird.

Die Behauptung, daß man sich vorstellen darf, daß die Beugungswelle einer beliebigen einfallenden Lichtwelle durch eine Zerstreuung dieser Welle an dem beugenden Rande entsteht, bezieht sich somit nur auf die Beugungswelle, die durch eine Superposition von Beugungswellen ebener Wellen entsteht. Man muß jedoch feststellen, daß einer solchen, durch eine Superposition von Beugungswellen ebener Wellen erzeugten Beugungswelle keine besondere physikalische Bedeutung entspricht. Eine solche Struktur der Beugungswelle kann ja doch experimentell wohl nicht festgestellt werden. Wenn man aber dennoch unter einer Beugungswelle auch eine derart definierte verstehen will, so kann man die im Titel der vorliegenden Mitteilung gestellte Frage, ob die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung stets im Sinne der Youngschen Anschauungen gedeutet werden kann, mit einem "ja" beantworten. Ist dies aber nicht der Fall, so lautet die Antwort "nein". Die Beantwortung unserer Frage hängt somit von der Definition der Beugungswelle ab, die, wie wir gesehen haben, gemäß (1.2) noch in verschiedener Weise vorgenommen werden kann je nach der Wahl des Vektorpotentials.

Anhang

Die einzige Forderung, die man an zwei Vektorpotentiale zu stellen hat, damit sie die gleiche, durch einen bestimmten Sommerfeld-Kirchhoffschen Ansatz gegebene, Wellenbewegung beschreiben, ist die, daß ihre Rotationen gemäß (1.4) das gleiche quellenfreie Vektorfeld ergeben. Man kann ja doch die Beziehung (1.4) als eine Differentialgleichung zur Bestimmung eines Vektorpotentials eines quellenfreien Vektorfeldes ansehen (vgl. Rubinowicz 1966, S. 83 ff., S. 104 ff.).

Um zu beweisen, daß das durch (4.1), (4.2) und (4.3) gegebene Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ die gleiche Wellenbewegung beschreibt, wie das Miyamoto-Wolfsche $\boldsymbol{W}^*_{MW}(P, Q)$ (4.4), genügt es somit zu zeigen, daß die Rotationen dieser beiden Vektorpotentiale das gleiche quellenfreie Vektorfeld darstellen.

Nun kann man diese beiden Vektorpotentiale, wie bereits oben in § 4 erwähnt wurde, durch je eine Differenz zweier Vektorpotentiale darstellen, von denen das eine zum Beobachtungspunkt P gehört, während das andere seinem Spiegelbild P' an der den physikalischen Halbraum begrenzenden Ebene entspricht.

Daß das Miyamoto-Wolfsche Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*_{MW}(P, Q)$ eine solche Gestalt hat, ist aus seiner Darstellung (4.4) unmittelbar ersichtlich.

Daß auch das Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ (4.3) die gleiche Gestalt besitzt, kann man sich überzeugen, wenn man das in dem Integranden in (4.1) bzw. in (4.2) auftretende Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ bzw. $\boldsymbol{W}^*(P, Q; O; \boldsymbol{e}')$ der ebenen Wellen gemäß (3.6) bzw. (3.7) durch die Differenz der beiden Vektor potentiale $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ (3.2) und $\boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e})$ bzw. durch $\boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}')$ und $\boldsymbol{W}(P', Q; O; \boldsymbol{e}')$ ersetzt. Man erhält dann für das Vektorpotential $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ (4.3) die Darstellung

$$\boldsymbol{W}^*(P, Q) = \boldsymbol{W}(P, Q) - \boldsymbol{W}(P', Q), \tag{A.1}$$

wo $\boldsymbol{W}(P, Q)$ durch

$$\boldsymbol{W}(P, Q) = k^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta)\, \boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e})\, d\xi d\eta \qquad \text{(A.2}$$

gegeben wird. Dabei ist in diesem Ausdruck für $\boldsymbol{e}$ innerhalb des Einheitskreises (2.3) der) Ausdruck (2.5) und außerhalb der durch (3.3) und (3.4) gegebene Ausdruck für $\boldsymbol{e}'$ zu verwenden. Das Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P', Q)$ erhält man, wenn in (A.2) der Punkt P durch P' ersetzt wird.

Gemäß (4.3) und (A.1) genügt es dann zu zeigen, daß die Rotationen der beiden Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}_{MW}(P, Q)$ (1.5) und $\boldsymbol{W}(P, Q)$ (A.2) einander gleich sind, also die Beziehung

$$\mathrm{rot}_Q\, \boldsymbol{W}(P, Q) = \mathrm{rot}_Q\, \boldsymbol{W}_{MW}(P, Q) \tag{A.3}$$

erfüllt ist. Da offenbar die gleiche Beziehung besteht, wenn in (A.3) der Punkt P durch sein Spiegelbild P' ersetzt wird, so wird damit der Beweis erbracht sein, daß die Rotationen der Vektorpotentiale $\boldsymbol{W}^*(P, Q)$ (4.3) und $\boldsymbol{W}^*_{MW}(P, Q)$ (4.4) einander gleich sind.

Bereits bei einer früheren Gelegenheit (Rubinowicz 1966, S. 333) wurde festgestellt, daß die Rotation des Miyamoto-Wolfschen Vektorpotentials $\boldsymbol{W}_{MW}(P, Q)$ (1.5) das quellenfreie Vektorfeld (1.3) ergibt.

Wir müssen demnach nur noch zeigen, daß bei der Anwendung des Operators rot_Q auf das Vektorpotential $\boldsymbol{W}(P, Q)$ (A.2) wir ebenfalls das gleiche Vektorfeld (1.3) erhalten. Wir können dabei rot_Q im allgemeinen auf den Integranden in (A.2) einwirken lassen, da die Koordinaten des Punktes Q in ihm nur die Rolle von Parametern spielen.

Nun ist

$$\mathrm{rot}_Q\, \boldsymbol{W}(P, Q; O; \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{V}'(P, Q, O; \boldsymbol{e}), \tag{A.4}$$

wobei das Vektorfeld $\boldsymbol{V}'(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ durch

$$\boldsymbol{V}'(P, Q; O; \boldsymbol{e}) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\, \mathrm{grad}_Q\, e^{ik\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{OQ}} - e^{ik\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{OQ}}\, \mathrm{grad}_Q \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\right] \tag{A.5}$$

gegeben wird. Wir erhalten nämlich $\boldsymbol{V}'(P, Q; O; \boldsymbol{e})$, wenn wir in (1.3) für die einfallende Lichtwelle $u(Q)$ den Ausdruck $\exp\,(ik\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{OQ})$ für eine ebene Welle verwenden.

Gemäß (A.2), (A.4) und (A.5) erhalten wir daher die Beziehung

$$\mathrm{rot}_Q\, \boldsymbol{W}(P, Q) = k^2 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta)\, \boldsymbol{V}'(P, Q; O; \boldsymbol{e})\, d\xi d\eta. \tag{A.6}$$

In dem im Integranden in (A.6) auftretenden Vektorfeld $\boldsymbol{V}'(P, Q; O; \boldsymbol{e})$ (A.5) sind die Variablen ξ, η nur in dem Ausdruck $\exp\,(ik\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}_{OQ})$ bzw. $\exp\,(ik\boldsymbol{e}'\boldsymbol{r}_{OQ})$ für homogene bzw. inhomogene ebene Wellen enthalten. Wenn nun in (A.6) die Integration mit dem in (A.5) auftretenden Operator grad_Q vertauschbar ist, so erhält man mit Rücksicht auf (2.2) aus dieser Beziehung mit Hilfe des Fourierschen Integralsatzes den Ausdruck (1.3) für das Vektorfeld $\boldsymbol{V}(P, Q)$ mit der gegebenen einfallenden Lichtwelle $u(Q)$.

LITERATURVERZEICHNIS

Braunbek, W., *Z. Naturforsch.*, **6a**, 12 (1951).

Durand, É., *C. R. Sci., Paris*, **226**, 1812 (1948).

Miyamoto, K., Wolf, E. *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**, 615 (1962a).

Miyamoto, K., Wolf, E. *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**, 626 (1962b).

Petykiewicz, J., *Acta Phys. Polon.*, **27**, 3 (1965a).

Petykiewicz, J., *Acta Phys. Polon.*, **27**, 723 (1965b).

Rubinowicz, A., *Ann. Phys.* (Leipzig), **53**, 257 (1917).

Rubinowicz, A., *Phys. Rev.*, **54**, 931 (1938).

Rubinowicz, A., *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*, erste Aufl., PWN, Warszawa 1957.

Rubinowicz, A., *Progr. Opt.*, **4**, 201 (1965).

Rubinowicz, A., *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*, zweite Aufl., Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York; PWN, Warszawa 1966.

Sommerfeld, A., *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. IV, *Optik*, 2. Aufl. bearbeitet und ergänzt von Fritz Bopp und Josef Meixner, Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1959.

Wolf, E., *Proc. Phys. Soc.*, **74**, 269 (1959).