KIRCHHOFFSCHE THEORIE DER BEUGUNG AUF GRUND EINER VERALLGEMEINERUNG DES HUYGENSSCHEN PRINZIPS

Kirchhoff's Theory of Diffraction on the Basis of a Generalization of the Huygens Principle

VON A. RUBINOWICZ*

Polnische Akademie der Wissenschaften

(Eingegangen am 17. Jänner 1970)

Dem Andenkan an Professor Henryk Niewodniczański gewidmet

Das Helmholtz–Huygenssche Prinzip für die Lösungen der Schwingungsgleichung $\Delta u+k^2u=0$ kann bekanntlich in der Weise verallgemeinert werden, daß man zum Elementargesetz, das die Struktur der Elementarwellen im Falle der üblichen Formulierung dieses Prinzips bestimmt, ein additives Zusatzglied hinzufügt. Es wird die Verwendbarkeit einer solchen Verallgemeinerung des Helmholtz–Huygensschen Prinzips zur Begründung einer Kirchhoffschen Theorie der Beugung sowie die physikalische Interpretation einer solchen Theorie sowohl vom Fresnelschen als auch vom Youngschen Standpunkt besprochen. Im Falle einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle gewährt die Aufspaltung der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz beschriebenen Wellenbewegung in eine geometrisch-optische und eine Beugungswelle einen Einblick in ihre Struktur. Es zeigt sich nämlich, daß unabhängig davon, durch welche Zusatzfunktion die Verallgemeinerung vorgenommen wird, die geometrisch-optische Wellenbewegung stets durch die einfallende Lichtwelle gegeben wird in Übereinstimmung mit den physikalischen Erwartungen und den Youngschen Anschauungen über die Entstehung der Beugungserscheinungen.

§ 1. Problemstellung und Inhalts übersicht

Die bedeutendste wissenschaftliche Leistung von Prof. Henryk Niewodniczański bestand in der im Jahre 1933 erfolgten Entdeckung der magnetischen Dipolstrahlung. Sein Interesse an den Problemen der "verbotenen" Spektrallinien ist seither niemals erloschen, wenn er auch in der letzten Zeitspanne seines Lebens sich vorwiegend mit kernphysikalischen Fragen beschäftigt hat. Es ist daher wohl angemessen seinem Andenken eine optische Untersuchung zu widmen.

Bekanntlich ergibt die Kirchhoffsche Beugungstheorie des Lichtes nur eine angenäherte Beschreibung der Beugungserscheinungen. Man kann sich daher die Frage stellen, ob man

* Adresse: Warszawa, Hoża 74/4, Polska.

nicht durch eine Verallgemeinerung des ihr zugrunde liegenden Huygensschen Prinzips eine bessere Darstellung der physikalischen Wirklichkeit erhalten kann. In der vorliegenden Untersuchung sollen daher die Eigenschaften einer solchen Verallgemeinerung besprochen werden.

In den folgenden Überlegungen wollen wir das Licht als eine skalare, harmonisch-periodische Wellenbewegung ansehen, die durch eine Lösung $u(P)$ der Helmholtzschen Schwingungsgleichung

$$\Delta_P u(P)+k^2u(P)=0 \tag{1.1}$$

beschrieben wird. Wir werden nämlich damit eine erhebliche Vereinfachung des zu verwendenden Formelnapparates gegenüber der elektromagnetischen Betrachtungsweise erzielen. Die Kirchhoffsche Beugungstheorie kann man dann mit Hilfe des für die Schwingungsgleichung (1.1) formulierten Helmholtz–Huygensschen Prinzips darstellen, wie dies allgemein üblich ist.

Man kann aber zur Formulierung einer Kirchhoffschen Beugungstheorie im Bereiche der Schwingungsgleichung (1.1) auch eine bekannte Verallgemeinerung des Helmholtz-Huygensschen Prinzips verwenden. Diese besteht darin, daß man zum Elementargesetz, das die Sekundärwellen beherrscht, noch ein Zusatzglied hinzufügt, das durch eine reguläre Lösung der Schwingungsgleichung dargestellt wird. Da man für dieses Zusatzglied noch verschiedene Lösungen der Schwingungsgleichung verwenden kann, entsteht die Frage, wodurch sich die Wellenbewegungen, die den verschiedenen Verallgemeinerungen entsprechen, untereinander sowie von der Wellenbewegung unterscheiden, die man bei Verwendung der üblichen Fassung des Helmholtz–Huygensschen Prinzips erhält.

Um diese Frage zu beantworten wird zunächst in § 2 die Formulierung des verallgemeinerten Helmholtz–Huygensschen Prinzips in Erinnerung gebracht, das in § 3 zur Begründung eines verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatzes verwendet wird. In § 4 werden sodann im Falle, wo die einfallende Lichtwelle von einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle ausgestrahlt wird, die Interpretationsmöglichkeiten dieses Ansatzes vom Fresnelschen und in § 5 vom Youngschen Standpunkt besprochen. Dabei erweist sich die Youngsche Betrachtungsweise der Fresnelschen insofern überlegen, als sie eine Einsicht in die Struktur der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz gegebenen Wellenbewegung ermöglicht. Wird nämlich die durch diesen Ansatz definierte Wellenbewegung im Sinne der Youngschen Anschauungen in eine geometrisch-optische und eine Beugungswelle aufgespaltet, so zeigt es sich daß die geometrisch-optische Welle stets die gleiche ist, unabhängig davon, ob wir uns der ursprünglichen Fassung des Helmholtz–Huygensschen Prinzips bedienen oder irgend einer seiner oben erwähnten Verallgemeinerungen. Sie wird nämlich, wohl in Übereinstimmung mit den physikalischen Erwartungen und den Youngschen Anschauungen, in allen Punkten des Raumes, in denen nach den Gesetzen der geometrischen Optik Licht vorhanden ist, durch die einfallende Lichtwelle dargestellt, verschwindet jedoch in allen übrigen Raumpunkten. Die Kirchhoffschen Wellenbewegungen, die durch die verschiedenen Verallgemeinerungen sowie durch die ursprüngliche Fassung des Helmholtz–Huygensschen Prinzips gegeben werden, unterscheiden sich also nur durch die Beugungswelle. Wie ebenfalls in § 5 gezeigt wird, tritt zu der Beugungswelle, die der üblichen Formulierung des Helmholtz–Huygensschen Prinzips entspricht und die in der Schattengrenze unstetig ist, noch eine zusätzliche Beugungswelle hinzu, von der man jedoch fordern muß, daß sie in der Schattengrenze einen stetigen Verlauf hat. Anderenfalls würde ja doch diese Wellenbewegung mit dem experimentellen Tatbestand im Widerspruch stehen. Allerdings wird es sich herausstellen, daß diese zusätzliche Beugungswelle im allgemeinen nicht im streng Youngschen Sinne gedeutet werden kann. Im allgemeinen entsteht sie also nicht durch eine Zerstreuung der einfallenden Welle am beugenden Rande. In diesem Falle müßte sie nämlich nur von der unmittelbar am beugenden Rande stattfindenden Wellenbewegung verursacht werden, was, wie sich erweisen wird, nicht der Fall sein wird. In § 6 wird gezeigt, welche Bedeutung für den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz die Tatsache hat, daß wir für die einfallende Welle die Strahlung einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle wählen. In § 7 wird eine im ganzen unendlichen Raum gültige Darstellung der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz definierten Wellenbewegung angegeben.

§ 2. Das verallgemeinerte Helmholtz–Huygenssche Prinzip

Das in der üblichen Weise formulierte Helmholtz–Huygenssche Prinzip kann in der Gestalt

$$u(P) = \int_F \boldsymbol{n} \boldsymbol{V}_0(P, Q) df_Q \tag{2.1}$$

dargestellt werden, wo

$$\boldsymbol{V}_0(P, Q) = \frac{1}{4\pi} [G_0(P, Q) \operatorname{grad}_Q u(Q) - u(Q) \operatorname{grad}_Q G_0(P, Q)] \tag{2.2}$$

ist und

$$G_0(P, Q) = \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \tag{2.3}$$

bedeutet. Hier ist F eine geschlossene Fläche, auf der die Integrationspunkte Q sich befinden, während P ein im Raum innerhalb F gelegener Beobachtungspunkt ist. Durch $\boldsymbol{n}$ wird dabei der Einheitsvektor der äußeren Normalen an die Fläche F dargestellt. Befindet sich der Beobachtungspunkt P außerhalb der geschlossenen Fläche F, so verschwindet das Integral (2.1). Die Funktion $u(P)$ muß eine innerhalb der Fläche F reguläre Lösung der Schwingungsgleichung (1.1) sein. Anderenfalls müssen ihre singulären Stellen aus dem Gebiet innerhalb der Fläche F durch besondere Flächen ausgeschieden werden.

Das obige Helmholtz–Huygenssche Prinzip kann man bekanntlich auch in der nachstehenden Weise verallgemeinern:

$$u(P) = \int_F \boldsymbol{n} \boldsymbol{V}(P, Q) df_Q \tag{2.1a}$$

wo

$$\boldsymbol{V}(P, Q) = \frac{1}{4\pi} [G(P, Q) \operatorname{grad}_Q u(Q) - u(Q) \operatorname{grad}_Q G(P, Q)] \tag{2.2a}$$

ist und $G(P, Q)$ durch

$$G(P, Q) = \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} + g(P, Q) \tag{2.3a}$$

gegeben wird. Dabei muß vorausgesetzt werden, daß die Funktion $g(P, Q)$, die wir im folgenden als die „Zusatzfunktion" bezeichnen wollen, innerhalb und auf der Fläche F als Funktion des Punktes Q bzw. P betrachtet eine reguläre Lösung der Schwingungsgleichung

$$(\Delta_Q + k^2) g(P, Q) = 0 \quad \text{bzw.} \tag{2.4a}$$

$$(\Delta_P + k^2) g(P, Q) = 0 \tag{2.4b}$$

ist.

In ihrer Abhängigkeit von Q muß nämlich $g(P, Q)$ eine Lösung der Schwingungsgleichung (2.4a) sein, damit

$$\operatorname{div}_Q \boldsymbol{V}(P, Q) = 0 \tag{2.5}$$

ist. Auf Grund der Beziehung (2.5) erhält man ja mit Hilfe des Gaußschen Satzes in bekannter Weise das verallgemeinerte Helmholtz–Huygenssche Prinzip, das durch (2.1a), (2.2a) sowie (2.3a) gegeben wird.

Wird jedoch $g(P, Q)$ als Funktion des Punktes P angesehen, so muß es die Schwingungsgleichung (2.4b) befriedigen, damit die Beiträge der einzelnen Oberflächenelemente df_Q in (2.1a) zur gesamten Funktion $u(P)$ im Punkte P Lösungen der Schwingungsgleichung (1.1) sind. Anderenfalls könnte man diese Beiträge nicht als Sekundärwellen im Sinne der Huygensschen Anschauungen deuten.

Die Funktionen $G_0(P, Q)$ (2.3) und $G(P, Q)$ (2.3a) kann man als die Elementargesetze ansehen, die die Beschaffenheit der Sekundärwellen bestimmen.

Zur Durchführung einiger weiter unten folgender Überlegungen ist es zweckmäßig das durch (2.2a) und (2.3a) gegebene Vektorfeld $\boldsymbol{V}(P, Q)$ durch

$$\boldsymbol{V}(P, Q) = \boldsymbol{V}_0(P, Q) + \boldsymbol{v}_0(P, Q) \tag{2.6}$$

auszudrücken, wo $\boldsymbol{V}_0(P, Q)$ durch (2.2) und (2.3) und daher $\boldsymbol{v}_0(P, Q)$ durch

$$\boldsymbol{v}_0(P, Q) = \frac{1}{4\pi} [g(P, Q) \operatorname{grad}_Q u(Q) - u(Q) \operatorname{grad}_Q g(P, Q)] \tag{2.7}$$

gegeben wird.

Das verallgemeinerte Helmholtz-Huygenssche Prinzip kann somit auf Grund von (2.6) auch in der nachstehenden Gestalt ausgedrückt werden

$$u(P) = \int_F \boldsymbol{n} \boldsymbol{V}_0(P, Q) df_Q + \int_F \boldsymbol{n} \boldsymbol{v}_0(P, Q) df_Q. \tag{2.8}$$

Das erste Integral rechts in (2.8) stellt das ursprüngliche Helmholtz-Huygenssche Prinzip dar, das durch (2.1), (2.2) und (2.3) definiert wird, und muß daher schon allein $u(P)$ darstellen. Das zweite Integral rechts in (2.8), in dem die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ auftritt, liefert demnach keinen Beitrag zu $u(P)$. Dies gilt jedoch nur solange als die Randwerte $u(Q)$ in den beiden Integralen in (2.8) einer einzigen, innerhalb der Fläche F regulären Lösung entnommen werden, wie wir dies in den obigen Überlegungen stets vorausgesetzt haben. Dies findet aber nicht mehr statt, wenn z. B. für $u(Q)$ auf zwei verschiedenen, aneinander grenzenden Teilen der Fläche F zwei verschiedene reguläre Lösungen der Schwingungsgleichung gewählt werden, so daß $u(Q)$ in einer auf F verlaufenden Kurve unstetig wird.

§ 3. Der verallgemeinerte Kirchhoffsche Ansatz

Ebenso, wie das durch (2.1), (2.2) und (2.3) dargestellte Helmholtz-Huygenssche Prinzip kann man auch seine durch (2.1a), (2.2a) und (2.3a) oder auch durch (2.8) und (2.7) gegebene Verallgemeinerung zur Formulierung eines Kirchhoffschen Ansatzes für die Wellenbewegung im Falle einer Beugungserscheinung verwenden. Dieser Ansatz wird durch (2.1a), (2.2a), (2.3a) oder auch durch (2.8) und (2.7) dargestellt, wenn F eine die beugende Öffnung verschließende Fläche und das in $V(P, Q)$ (2.2a) auftretende $u(Q)$ die einfallende Lichtwelle bedeutet. Im folgenden wollen wir, falls das Gegenteil nicht ausdrücklich betont wird, stets voraussetzen, daß (2.1), (2.2) und (2.3) sowie (2.1a), (2.2a) und (2.3a) oder (2.8) und (2.7) einen Kirchhoffschen Ansatz zur Beschreibung der Beugungserscheinungen darstellen, also in diesen Formeln F und $u(Q)$ die oben angegebene Bedeutung besitzen.

Den durch (2.1), (2.2) und (2.3) gegebenen Ansatz wollen wir dabei als den ursprünglichen und den durch (2.1a), (2.2a), (2.3a) oder (2.8) und (2.7) dargestellten als den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz bezeichnen. Ebenso wollen wir gelegentlich von einer ursprünglichen und einer verallgemeinerten Kirchhoffschen Wellenbewegung sprechen.

Wird das verallgemeinerte Helmholtz-Huygenssche Prinzip in der durch (2.7) und (2.8) dargestellten Gestalt zur Formulierung eines verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatzes verwendet, so darf das zweite rechts in (2.8) auftretende, das Vektorfeld $\boldsymbol{v}_0(P, Q)$ enthaltende Integral selbstverständlich nicht weggelassen werden, da es ja in diesem Falle einen nicht verschwindenden Beitrag zur Wellenbewegung liefert. Die Berandung der Fläche F wird ja durch die beugende Kante gegeben, in der die auf der Fläche F durch die einfallende Welle gegebenen Funktionswerte sprunghaft auf Null herabsinken.

Beim Übergang vom Helmholtz-Huygensschen Prinzip zum Kirchhoffschen Ansatz muß man die geschlossene Fläche F in den Schattenhalbraum H_S deformieren, der durch den Schirm S und eine die beugende Öffnung verschließende Fläche begrenzt wird und der die Lichtquelle L nicht enthält. Die Deformation der Fläche F muß dabei in eine Fläche vorgenommen werden, die längs des beugenden Schirmes S und längs einer die beugende Öffnung verschließenden Fläche verläuft und auch aus einer im Unendlichen befindlichen Fläche F^* besteht. Die Fläche F^* darf dabei zur Wellenbewegung im Beobachtungspunkte P keinen Beitrag liefern. Dies würde ja nämlich bedeuten, daß aus dem Unendlichen kommende Wellen Beiträge zur Wellenbewegung im Punkte P beisteuern, was unserer Problemstellung widerspricht. Im Falle des ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatzes verschwindet das Integral über die Fläche F^* wenn die einfallende Lichtwelle $u(Q)$ im Unendlichen die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Im Falle des verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatzes verschwindet unter der gleichen Voraussetzung das erste Integral in (2.8) wenn wir es über die Fläche F^* erstrecken. Damit auch das zweite Integral rechts in (2.8) den Grenzwert Null hat, wenn wir die Integration über die Fläche F^* vollziehen, setzen wir voraus, daß die Funktion $g(P, Q)$, die in dem Elementargesetz $G(P, Q)$ (2.3a) auftritt, als Funktion des Punktes Q im Unendlichen die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Um diese letztere Annahme machen zu können, werden wir überdies voraussetzen, daß die einfallende Lichtwelle durch die Strahlung einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle gegeben wird. Wir werden diese Voraussetzungen in § 6 näher begründen.

Da wir uns im folgenden ausschließlich mit dem Fall beschäftigen, wo die einfallende Lichtwelle $u(Q)$ durch die Strahlung einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle L gegeben wird d.h. wo

$$u(Q) = \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \tag{3.1}$$

ist, so wird der verallgemeinerte Kirchhoffsche Ansatz gemäß (2.1a), (2.2a), (2.3a) sowie (3.1) gegeben durch

$$u_K(L, P) = \frac{1}{4\pi} \int_F \boldsymbol{n} \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} - \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \right] df_Q +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_F \boldsymbol{n} \left[g(P, Q) \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} - \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \operatorname{grad}_Q g(P, Q) \right] df_Q. \tag{3.2}$$

Die Normale $\boldsymbol{n}$ an die die beugende Öffnung überspannende Fläche F hat in (3.2) eine Richtung in den Lichthalbraum H_L hinein. Mit H_L bezeichnen wir dabei den Halbraum, der die Lichtquelle L enthält und durch den beugenden Schirm S und die Fläche F begrenzt wird, die die beugende Öffnung verschließt.

Das erste Integral rechts in (3.2) stellt die durch den ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz definierte Wellenbewegung dar, während ihre Abänderung durch die zu ihrem Elementargesetz $G_0(P, Q)$ (2.3) hinzutretende Zusatzfunktion $g(P, Q)$ durch das zweite Integral gegeben wird.

§ 4. *Physikalische Deutung der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz definierten Wellenbewegung vom Standpunkte der Fresnelschen Anschauungen*

Eine natürliche Deutung der Wellenbewegung, die durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz (3.2) beschrieben wird, besteht darin daß man, ebensowie beim verallgemeinerten Helmholtz-Huygensschen Prinzip, die Funktion $G(P, Q)$ als das Elementargesetz ansieht, das die Natur der Sekundärwellen bestimmt.

Eine solche Deutung entspricht vollkommen den Fresnelschen Anschauungen über die Entstehung der Beugungserscheinungen. Sie gewährt uns jedoch keinen Einblick in die Struktur der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz dargestellten Wellenbewegung. Um einen solchen zu erhalten stellen wir uns zunächst die Frage, wodurch sich die durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz beschriebene Wellenbewegung von der durch den ursprünglich gegebenen unterscheidet. Um diese Frage zu beantworten kann man zunächst versuchen, von der durch den verallgemeinerten Ansatz definierten Wellenbewegung die durch den ursprünglichen Ansatz gegebene zu subtrahieren. Bei der Angabe dieses "Differenzfeldes", wie wir es im folgenden nennen wollen, werden wir uns, wie oben angekündigt wurde, auf den Fall beschränken, wo die einfallende Lichtwelle von einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle L ausgestrahlt, also durch (3.1) dargestellt wird.

Da das erste Integral rechts in (3.2) die durch den ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz beschriebene Wellenbewegung darstellt, wird das Differenzfeld durch das zweite Integral rechts in (3.2) gegeben.

Selbstverständlich kann man die durch das Differenzfeld dargestellte Wellenbewegung als durch Sekundärwellen verursacht denken, denen das Elementargesetz $g(P, Q)$ zugrunde liegt.

Man kann jedoch diese Wellenbewegung auch in einer anderen Weise interpretieren. Vergleicht man die durch das Differenzfeld gegebene Wellenbewegung mit der durch den ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz d.h. durch das erste Integral rechts in (3.2) dargestellten, so kann man das Differenzfeld als eine Wellenbewegung in dem Punkte L deuten, in dem die Lichtquelle sich befindet, die durch die (durch die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ definierte) einfallende Lichtwelle gegeben wird, wenn wir $g(P, Q)$ als eine Funktion des Punktes Q ansehen. Mit Rücksicht auf das Vorzeichen in dem Ausdruck für das Differenzfeld hat man dabei anzunehmen, daß nun die Normale an die Fläche F durch $-\mathfrak{n}$ gegeben wird, also den entgegengesetzten Richtungssinn wie die Normale im Falle des ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatzes (2.1) hat. Die einfallende Lichtwelle $g(P, Q)$ stellt somit eine vom Schattenhalbraum H_S her auf die beugende Öffnung F einfallende Lichtwelle. Dabei ist zu beachten, daß $g(P, Q)$ auch eine Funktion des Punktes P ist. Das Differenzfeld stellt somit eine Wellenbewegung am Orte der feststehenden Lichtquelle L dar, die jedoch für verschiedene Lagen des Beobachtungspunktes P durch verschiedene einfallende Lichtwellen bewirkt wird.

Leider muß man feststellen, daß die obige Deutung des Beitrages der durch die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ verursachten Wellenbewegung physikalisch nicht befriedigend ist. Dieser Beitrag beschreibt nämlich eine Wellenbewegung, die im Beobachtungspunkte P stattfindet, durch eine Wellenbewegung in dem Punkte L, in dem die Lichtquelle sich befindet.

Es mag hier noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß für die angegebene Deutung der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz angegebenen Wellenbewegung die Annahme ganz wesentlich ist, daß die einfallende Lichtwelle durch die Wellenbewegung (3.1) einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle verursacht wird. Die angegebene Interpretation wird nämlich durch den Umstand ermöglicht, daß die einfallende Lichtwelle (3.1) und die im ursprünglichen Helmholtz-Huygensschen Prinzip die "Sonde" (vgl. Sommerfeld 1950, Rubinowicz 1966, S. 12) darstellende Funktion (exp $ikr_{PQ})/r_{PQ}$ durch die gleiche Funktion gegeben werden. Es konnte daher im Differenzfeld in (3.2) die einfallende Lichtwelle (3.1) die Rolle der Sonde übernehmen.

§ 5. Umformung des verattgemeinerten Kirchhoffschen Ansatzes gemäß den Youngschen Anschauungen

Wie in § 1 angekündigt wurde, wird jedoch eine physikalisch befriedigendere Deutung der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz (3.2) beschriebenen Wellenbewegung erhalten, wenn wir diesen Ansatz im Sinne der Youngschen Anschauungen über die Entstehung der Beugungserscheinungen umformen, d. h. die von ihm beschriebene Wellenbewegung in eine geometrisch-optische und eine Beugungswelle aufspalten. Dies kann mit dem gleichen Endergebnis auf allen Wegen geschehen, die zu einer solchen Umformung des ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatzes verwendet werden können (vgl. Rubinowicz 1917; 1966, S. 76 ff.). Ebenso wie oben und auch im weiteren Verlauf der vorliegenden Untersuchung setzen wir auch nun voraus, daß die einfallende Lichtwelle von einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle ausgestrahlt also durch (3.1) gegeben wird. Einen sehr bequemen Weg zur Abspaltung der geometrisch-optischen Welle von der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz dargestellten Wellenbewegung bietet in diesem speziellen Falle das Verfahren, das der Verfasser im Jahre 1917 im Falle des ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatzes verwendet hat.

Um es anzuwenden denken wir uns zunächst einen Halbkegel konstruiert, dessen Spitze mit dem Punkte L zusammenfällt, in dem die Lichtquelle sich befindet. Die Erzeugenden dieses Halbkegels werden dann durch die Halbstrahlen gegeben, die im Punkte L beginnen und durch die einzelnen Punkte des beugenden Randes B gehen, der die diebeugende Öffnung verschließende Fläche F begrenzt. Stellen wir uns nun vor, daß wir die Spitze dieses Halbkegels längs der Fläche F abschneiden, so erhalten wir einen Kegelstumpf K, der von der Deckfläche F, einem beschnittenen Kegelmantel M sowie einer im Unendlichen den Kegelstumpf abschließenden Fläche begrenzt wird.

Wenn wir nun auf das Innere dieses Kegelstumpfes K das verallgemeinerte Helmholtz-Huygenssche Prinzip (2.1a), (2.2a) und (2.3a) anwenden und für die Funktion $u(Q)$ die durch die Lichtquelle L verursachte Wellenbewegung (3.1) benützen, so wird durch das über die Flächen F und M erstreckte Integral (2.1a) die geometrisch-optische Wellenbewegung in dem Schattenhalbraum H_S dargestellt. Innerhalb des Kegelstumpfes K wird nämlich die Wellenbewegung durch die einfallende Lichtwelle (3.1) gegeben, außerhalb K verschwindet sie jedoch in dem ganzen übrigen Halbraum H_S. Das erste Integral rechts in (3.2) übei die Fläche, die den von den Flächen F und M begrenzten Raum im Unendlichen abschließt, verschwindet nämlich, da die einfallende Lichtwelle (3.1) die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Damit auch das zweite Integral rechts in (3.2) verschwindet setzen wir voraus, daß $g(P, Q)$ als Funktion des Punktes Q im Unendlichen die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung erfüllt, wie dies in § 6 begründet wird.

Bezeichnen wir nun diese geometrisch-optische Wellenbewegung mit $u_G(L, P)$, so erhält nun der durch (3.2) dargestellte, verallgemeinerte Kirchhoffsche Ansatz $u_K(L, P)$ die nachstehende Gestalt

$$u_K(L, P) = u_G(L, P) + u_B(L, P), \tag{5.1}$$

wobei $u_B(L, P)$ durch das Integral über die Mantelfläche M

$$u_B(L, P) = -\int_M \boldsymbol{n}\boldsymbol{V}(P, Q)df_Q \tag{5.2}$$

dargestellt wird, wenn in $\boldsymbol{V}(P, Q)$ (2.2a) für $u(Q)$ die Wellenbewegung (3.1) verwendet wird. Falls daher der verallgemeinerte Kirchhoffsche Ansatz $u_K(L, P)$ (3.2) gemäß (5.1) im Schattenhalbraum H_S im Sinne der Youngschen Anschauungen in eine geometrisch--optische Wellenbewegung $u_G(L, P)$ und eine Beugungswelle aufspaltbar ist, so muß die Beugungswelle durch $u_B(L, P)$ (5.2) gegeben sein.

Um dies klarzustellen bemerken wir, daß die Beugungswelle $u_B(L, P)$ (5.2) in zwei Teile

$$u_B(L, P) = u_{B0}(L, P) + u_{B1}(L, P) \tag{5.3}$$

aufgespaltet werden kann, wo mit Rücksicht auf (3.1) sowie (2.1a), (2.2a) und (2.3a)

$$u_{B0}(L, P) = -\frac{1}{4\pi}\int_M \boldsymbol{n}\left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\operatorname{grad}_Q\frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} - \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}\operatorname{grad}_Q\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\right]df_Q, \tag{5.4a}$$

$$u_{B1}(L, P) = \frac{1}{4\pi}\int_M \boldsymbol{n}\left[\frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}\operatorname{grad}_Q g(P, Q) - g(P, Q)\operatorname{grad}_Q\frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}\right]df_Q \tag{5.4b}$$

ist.

Das Integral, das in dem Ausdruck (5.4a) für $u_{B0}(L, P)$ auftritt, wurde vom Verfasser bereits im Jahre 1917 in seiner ersten Veröffentlichung über die Kirchhoffsche Theorie der Beugung berechnet. Es kann in der Gestalt

$$u_{B0}(L, P) = -\frac{1}{4\pi}\int_B \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}}\,\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}}\,\frac{\boldsymbol{r}_{PQ}(\boldsymbol{r}_{LQ}\times\boldsymbol{ds}_Q)}{r_{LQ}r_{PQ}+\boldsymbol{r}_{LQ}\boldsymbol{r}_{PQ}} \tag{5.5}$$

dargestellt werden, wo das Element des beugenden Randes $\boldsymbol{ds}_Q$ der Richtung der Normalen $\boldsymbol{n}$ an die Deckfläche F durch die Rechtsschraubenregel zugeordnet ist. In der Gestalt (5.5) wird die Beugungswelle erhalten, wenn man von dem ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz (2.1), (2.2) und (2.3) ausgeht, d. h. wenn $g(P, Q) = 0$ gesetzt wird. Wenn wir uns in die Schattengrenze des Randelements $\boldsymbol{ds}_Q$ begeben erhalten die beiden Vektoren $\boldsymbol{r}_{LQ}$ und $\boldsymbol{r}_{PQ}$ die gleiche Richtung, jedoch einen entgegengesetzten Richtungssin so daß $r_{LQ}r_{PQ}+\boldsymbol{r}_{LQ}\boldsymbol{r}_{PQ} = 0$ wird. Es wird daher der Beitrag von $\boldsymbol{ds}_Q$ zur Beugungswelle $u_{B0}(L, P)$ (5.5) unendlich. Dieses Verhalten von (5.5) wird durch die Tatsache bedingt, daß die gesamte Beugungswelle $u_{B0}(L, P)$ (5.5) in der Schattengrenze einen Sprung erleidet. Da nämlich der durch das verallgemeinerte Kirchhoffsche Beugungsintegral (3.2) dargestellte Wellenvorgang im ganzen Schattenhalbraum H_S also auch in der Schattengrenze sich regulär verhält, muß die Unstetigkeit der geometrisch-optischen Wellenbewegung durch eine Unstetigkeit der Beugungswelle kompensiert werden. Der durch $u_G(L, P)+u_{B0}(L, P)$ dargestellte Wellenvorgang entspricht dem ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz und muß sich daher in der Schattengrenze regulär verhalten, darf insbesondere hier keine Unstetigkeit besitzen.

Auch die durch $u_{B1}(L, P)$ dargestellte Wellenbewegung muß daher in der Schattengrenze regulär sein. Sie darf demnach hier insbesondere keinen Sprung erleiden. Dieser Umstand bewirkt selbstverständlich eine Einschränkung in der Wahl der Funktion $g(P, Q)$ für die Zwecke eines verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatzes.

Zur Umformung des Ausdruckes (5.4b) für die Beugungswelle $u_{B1}(L, P)$ kann man den Weg einschlagen, wenn auch nicht zu Ende gehen, der zur Umformung der Beugungswelle $u_{B0}(L, P)$ (5.4a) in den Ausdruck (5.5) benutzt wurden (Rubinowicz 1917; 1966, S. 76). Zu diesem Zwecke bemerken wir daß

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}_Q\,(e^{ikr_{LQ}}/r_{LQ}) = 0 \tag{5.6}$$

ist, da ja beim Fortschreiten in der Richtung der Normalen $\boldsymbol{n}$ an die Schattengrenze, d. h. an die Mantelfläche M, in erster Näherung r_{LQ} konstant ist. Sodann kann man für $\boldsymbol{n}df_Q$ den Ausdruck

$$\boldsymbol{n}df_Q = \frac{r_{LQ}}{r_{LQ^*}}\,d\boldsymbol{r}_{LQ}\times d\boldsymbol{s}_{Q^*} \tag{5.7}$$

verwenden (vgl. Rubinowicz 1966, S. 78), wo Q^* einen Punkt des beugenden Randes und $\boldsymbol{r}_{LQ^*}$ den Abstand der Lichtquelle L von diesem Punkte bezeichnet. Mit Rücksicht auf (5.4b), (5.6) und (5.7) wird

$$u_{B1}(L, P) = -\int_B d\boldsymbol{s}_{Q^*}\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{r_{LQ^*}}\int_{r_{LQ^*}}^{+\infty} e^{ikr_{LQ}}[d\boldsymbol{r}_{LQ}\times\mathrm{grad}_Q\,g(P, Q)]. \tag{5.8}$$

Die Integration nach $d\boldsymbol{r}_{LQ}$ ist in (5.8) längs eines Halbstrahls $\boldsymbol{h}$ zu erstrecken, der eine Erzeugende des Kegelstumpfmantels M bildet, in dem die Schattengrenze sich befindet. Selbstverständlich muß man verlangen, daß $u_{B1}(L, P)$ (5.8) bei der Annäherung des Beobachtungspunktes P an den Halbstrahl $\boldsymbol{h}$ nicht unendlich wird. Daher muß man fordern, daß die ersten Ableitungen von $g(P, Q)$ nach den Koordinaten des Punktes Q in jeder Richtung senkrecht zum Halbstrahl $\boldsymbol{h}$ nicht allzustark unendlich werden, wenn der Punkt P sich einem Punkte Q auf diesem Halbstrahl unbegrenzt nähert.

Aus (5.3) sowie (5.5) und (5.8) folgt, daß die gesamte Beugungswelle $u_B(L, P)$ aus Beiträgen der einzelnen Randelemente $d\boldsymbol{s}_{Q^*}$ des beugenden Randes sich zusammensetzt. Allerdings muß bemerkt werden, daß nur die Beugungswelle $u_{B0}(L, P)$ (5.5) der Forderung genügt, die man im Sinne der Youngschen Anschauungen an eine Beugungswelle zu stellen hat, nämlich daß sie durch eine Zerstreuung der einfallenden Lichtwelle (3.1) an den einzelnen Elementen $d\boldsymbol{s}_{Q^*}$ des beugenden Randes entsteht.

Die Beugungswelle $u_{B1}(L, P)$ (5.8) besteht zwar ebenfalls aus Beiträgen der einzelnen Randelemente $d\boldsymbol{s}_{Q^*}$, jeder dieser Beiträge ist jedoch nicht nur von dem Zustande der einfallenden Lichtwelle (3.1) am Orte des beugenden Randelements $d\boldsymbol{s}_{Q^*}$ abhängig, sondern wird auch durch die Beiträge der einfallenden Lichtwelle (3.1) längs des ganzen Halbstrahls $\boldsymbol{h}$ bedingt. Dabei kann man sich vorstellen, daß das Elementargesetz, das die Beschaffenheit der Sekundärwellen in der Beugungswelle $u_{B1}(L, P)$ bestimmt, durch $g(P, Q)$ gegeben wird.

Eine andere Deutungsmöglichkeit für die Beugungswelle $u_{B1}(L, P)$ erhält man, wenn man (5.8) mit dem Ausdruck vergleicht, den Miyamoto und Wolf (1962a; vgl. auch Rubinowicz 1962; 1966, Anhang) für die Beugungswelle des Kirchhoffschen Ansatzes im Falle einer beliebigen einfallenden Lichtwelle $u(Q)$ angegeben haben. Er lautet

$$u_B(P) = \int_B d\boldsymbol{s}_{Q^*} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PQ^*}} \int_{PQ^*}^{+\infty} e^{ikr_{PQ}} [d\boldsymbol{r}_{PQ} \times \mathrm{grad}_Q\, u(Q)]. \tag{5.9}$$

Hier bedeuted $u(Q)$ die einfallende Lichtwelle, P den Punkt für den die Beugungswelle berechnet wird, Q^* einen Punkt am beugenden Rande B. Die Integration ist längs eines Halbstrahls $\boldsymbol{h}^*$ zu erstrecken, der im Punkte Q^* beginnt und der die Fortsetzung der Verbindungsgerad ender beiden Punkte P und Q^* bildet. Der Vergleich der beiden Ausdrücke (5.8) und (5.9) zeigt daß (5.8) bis auf das Vorzeichen formell als der Ausdruck für die Beugungswelle in dem Raumpunkte aufgefaßt werden kann, in dem die Lichtquelle L sich befindet. Dabei wird die einfallende Lichtwelle durch die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ gegeben, wenn wir sie als eine Funktion des Punktes Q auffassen. Der Punkt P spielt dann in (5.8) die Rolle eines Parameters. Für verschiedene Beobachtungspunkte P haben wir es somit mit einer verschiedenen einfallenden Lichtwelle $g(P, Q)$ zu tun. Man kann daher $u_{B1}(L, P)$ (5.8) als die zum Differenzfeld in (3.2) gehörige Beugungswelle auffassen. Daß dem Differenzfeld keine geometrisch-optische Wellenbewegung entspricht, wird durch die Tatsache bedingt, daß die Funktion $g(P, Q)$ als Funktion des Punktes Q betrachtet keine Singularitäten besitzt.

Wenn die Funktion $u(Q)$ in (5.9) gewisse Bedingungen erfüllt, kann das in (5.9) auftretende, über den Halbstrahl $\boldsymbol{h}^*$ erstreckte Integral in eine Reihe entwickelt werden, deren Glieder nur von dem Werte der Funktion $u(Q)$ und deren Ableitungen in dem Anfangspunkte Q^* des Halbstrahls $\boldsymbol{h}^*$ abhängen (Miyamoto und Wolf 1962b; eine andere Entwicklung bei Rubinowicz 1962; 1966, S. 355 ff.). Man kann diese Reihenentwicklung auch auf das in der Beugungswelle $u_{B1}(L, P)$ (5.8) über den Halbstrahl $\boldsymbol{h}$ erstreckte Integral anwenden, wenn die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ als Funktion von Q gewissen Bedingungen genügt. Das in Rede stehende Integral wird dann durch die Werte der Funktion $g(P, Q)$ und ihrer Ableitungen, wenn wir sie als Funktion des Punktes Q auffassen, in dem Punkte Q^* des beugenden Randes bestimmt. Falls eine solche Umformung des in $u_{B1}(L, P)$ (5.8) über den Halbstrahl $\boldsymbol{h}$ erstreckten Integrals möglich ist, so entspricht diese Beugungswelle in dieser Hinsicht den Youngschen Anschauungen. Allerdings wird dadurch nicht der Umstand beseitigt, daß sie eine Wellenbewegung in dem Punkte L darstellt, in dem die Lichtquelle sich befindet und nicht der Beobachtungspunkt P.

Von einem mit den Youngschen Anschauungen vollständig übereinstimmenden Standpunkt könnte man die Beugungswelle $u_{B1}(L, P)$ (5.8) interpretieren, wenn für sie ein Reziprozitätstheorem gelten würde. Dies ist jedoch nicht der Fall. In § 7 wird nämlich gezeigt, daß kein Reziprozitätstheorem für die gesamte, durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz definierte Wellenbewegung $u_K(L, P)$ besteht. Nun ist aber gemäß (5.1) und (5.3)

$$u_K(L, P) = u_G(L, P) + u_{B0}(L, P) + u_{B1}(L, P).$$

Da die Summe $u_G(L, P)+u_{B0}(L, P)$ der beiden ersten Glieder rechts in der obigen Beziehung die durch den ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz definierte Wellenbewegung darstellt, für die ein Reziprozitätstheorem vorhanden ist, so wird das Nichtvorhandensein eines Reziprozitätstheorems durch das dritte Glied rechts, d.h. durch die Beugungswelle $u_{B1}(L, P)$ bedingt.

Es unterliegt keinem Zweifel daß die oben an erster Stelle angegebene physikalische Deutung der zusätzlichen Beugungswelle $u_{B1}(L, P)$ (5.8) der zuletzt angeführten, auf Grund von (5.9) erhaltenen vorzuziehen ist. Unabhängig von der physikalischen Interpretation gewährt jedoch die Aufspaltung der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz (3.2) beschriebenen Wellenbewegung in eine geometrisch-optische und eine Beugungswelle einen Einblick in die Struktur dieser Wellenbewegung.

§ 6. Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung für die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ zum Elementargesetz des verallgemeinerten Helmholtz-Huygensschen Prinzips

In den vorangehenden Paragraphen wurden einige Forderungen präzisiert, die man an die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ im Elementargesetz (2.3a) des verallgemeinerten Helmholtz-Huygensschen Prinzips stellen muß. In dem nachfolgenden Paragraphen wird eine weitere Forderung angegeben werden, der diese Funktion genügen muß.

Im laufenden Paragraphen wollen wir begründen, warum wir uns in § 3 dafür entschieden haben, daß die einfallende Lichtwelle $u(Q)$ durch die Strahlung (3.1) einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle gegeben sein soll. Gleichzeitig soll gezeigt werden, daß man in diesem Falle die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ zum Elementargesetz $G(P, Q)$ (2.3a) des verallgemeinerten Helmholtz-Huygensschen Prinzips der Sommerfeldschen Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung unterwerfen kann, wenn $g(P, Q)$ als eine Funktion der Koordinaten des Punktes Q angesehen wird.

Für die nachfolgenden Überlegungen wollen wir zunächst voraussetzen, daß die im verallgemeinerten Helmholtz-Huygensschen Prinzip (2.1a), (2.2a) und (2.3a) auftretende Funktion $u(Q)$, die im ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz durch die einfallende Lichtwelle (3.1) dargestellt wird, nicht durch diese spezielle Funktion gegeben wird. Überdies wollen wir annehmen, daß der Teil F^* der Fläche F, der ins Unendliche verschoben wird, eine Kugelfläche oder ein Teil einer solchen Fläche mit dem Mittelpunkte in einem Punkte O ist, der sich irgendwo im Endlichen befindet. Der Radius dieser Kugelfläche wird dann durch r_{OQ} gegeben. Da die Normale $\boldsymbol{n}$ an die Kugelfläche F^* nach außen hin gerichtet ist, so wird auf F^* der Operator $\boldsymbol{n}$ grad_Q durch $\partial/\partial r_{OQ}$ dargestellt. Das Integral über die Fläche F^*, das dem zweiten Integral rechts in (2.8) entspricht, hat dann die Gestalt

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\left[g(P,Q)\,\frac{\partial u(Q)}{\partial r_{OQ}}-u(Q)\,\frac{\partial g(P,Q)}{\partial r_{OQ}}\right] r_{OQ}^2 d\omega.$$

Die Integration nach ω ist hier über den der Fläche F^* entsprechenden Raumwinkel Ω zu erstrecken. Der Ausgangspunkt für unsere Überlegungen wird dann erhalten, wenn wir das obige Integral in der nachstehende Form darstellen:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\left\{g(P,Q)\left[r_{OQ}\left(\frac{\partial u(Q)}{\partial r_{OQ}}-iku(Q)\right)\right]-\right.$$

$$\left.-u(Q)\left[r_{OQ}\left(\frac{\partial g(P,Q)}{\partial r_{OQ}}-ikg(P,Q)\right)\right]\right\}r_{OQ}d\omega. \tag{6.1}$$

Es ist klar, daß man voraussetzen muß, daß die im verallgemeinerten Helmholtz-Huygensschen Prinzip (2.8) auftretende Funktion $u(Q)$ im Unendlichen die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung erfüllt, also die beiden Beziehungen bestehen

$$\lim_{r_{OQ}\to\infty} u(Q)=0 \quad \text{und} \quad \lim_{r_{OQ}\to\infty} r_{OQ}\left[\frac{\partial u(Q)}{\partial r_{OQ}}-iku(Q)\right]=0. \tag{6.2}$$

Sonst würde das erste Integral rechts in (2.8) wenn wir es über die Fläche F^* erstrecken, im Grenzfalle $r_{OQ}\to\infty$ nicht verschwinden.

Damit das Integral (6.1) im Grenzfalle $r_{OQ}\to\infty$ sich unbeschränkt dem Grenzwert Null nähert, müßte dann die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ in ihrer Abhängigkeit von den Koordinaten des Punktes Q den beiden Beziehungen genügen:

$$\lim_{r_{OQ}\to\infty} |r_{OQ}g(P,Q)| = \text{endlich},$$

$$\lim_{r_{OQ}\to\infty}\left|r_{OQ}^2\left[\frac{\partial g(P,Q)}{\partial r_{OQ}},-ikg(P,Q)\right]\right| = \text{endlich}. \tag{6.3}$$

Die Zusatzfunktion müßte dann sozusagen verschärfte Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingungen[1] erfüllen und nicht die üblichen

$$\lim_{r_{OQ}\to\infty} g(P,Q)=0,$$

$$\lim_{r_{OQ}\to\infty} r_{OQ}\left[\frac{\partial g(P,Q)}{\partial r_{OQ}}-ikg(P,Q)\right]=0. \tag{6.4}$$

Den Bedingungen (6.3) genügen im allgemeinen nicht beliebige Funktionen $g(P, Q)$, wenn man sie als Funktionen der Koordinaten des Punktes Q betrachtet. Sie werden jedoch z. B. von der Funktion

$$\frac{e^{ikr_{OQ}}}{r_{OQ}} \tag{6.5}$$

---

[1] Die Berechtigung die Bedingungen (6.3) als eine verschärfte Fassung der üblichen Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingungen anzusehen, ergibt sich aus der Tatsache, daß wir z. B. aus der verschärften Endlichkeitsbedingung (6.3) die Beziehung erhalten

$$\lim_{r_{OQ}\to\infty}\frac{1}{r_{OQ}}\cdot\lim_{r_{OQ}\to\infty}|\,r_{OQ}\,g(P,Q)| = \lim_{OQ\to\infty}|\,g(P,Q)\,| = 0,$$

in der das letzte Glied der Endlichkeits Bedingung in (6.4)

$$\lim_{r_{OQ}\to\infty} g(P,Q)=0$$

äquivalent ist. Eine analoge Überlegung kann man für die verallgemeinerte bzw. die übliche Ausstrahlungsbedingung, (6.3) bzw. (6.4), durchführen.

erfüllt oder auch von den Funktionen $g(P, Q)$ die sich in den unendlich fernen Punkten wie die Funktion (6.5) verhalten. Ihr Verhalten im Unendlichen kann also z. B. durch einzelne oder auch durch Summen von Multipolen beliebiger Ordnung oder auch nicht punktförmige Singularitäten gegeben sein.

Ein Verschwinden des Grenzwertes des Integrals (6.1) im Grenzfalle $r_{OQ} \to \infty$ kann man aber auch erreichen, wenn man für die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ die übliche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung (6.4) fordert, jedoch für die Funktion $u(Q)$ die zu (6.3) analogen, stärkeren Bedingungen

$$\lim_{r_{OQ}\to\infty} |r_{OQ} u(Q)| = \text{endlich},$$

$$\lim_{r_{OQ}\to\infty} \left| r_{OQ}^2 \left[\frac{\partial u(Q)}{\partial r_{OQ}} - iku(Q) \right] \right| = \text{endlich} \tag{6.6}$$

voraussetzt[2,3].

Wir entscheiden uns für die letztere Alternative, fordern also daß die Funktion $g(P, Q)$ die übliche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung (6.4) und die einfallende Lichtwelle $u(Q)$ die verschärfte Bedingung (6.5) erfüllt. Dabei setzen wir insbesondere voraus, daß die einfallende Lichtwelle durch die Strahlung (3.1) einer isotropen, punktförmigen Lichtquelle gegeben wird, die der verschärften Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung (6.5) genügt. Mit ein Grund für diese Wahl war auch die Einfachheit dieser Wellenbewegung und der durch sie verursachten Beugungserscheinungen maßgebend, z. B. das Vorhandensein einer scharfen, also durch eine Fläche gegebenen Schattengrenze. Damit wurde auch erreicht daß, wie bereits oben in § 4 bemerkt wurde, die einfallende Lichtwelle durch die gleiche Funktion wie die Sonde im ursprünglichen Helmholtz-Huygensschen Prinzip gegeben wird, was für die Möglichkeit der Durchführung gewisser Überlegungen in § 4 und § 5 entscheidend war.

Beschränkt man sich auf die Betrachtung des Wellenvorganges in dem Schattenhalbraum H_S, so wie wir es bisher stets getan haben, so ist es nicht schwer Funktionen $g(P, Q)$ anzugeben, die den oben angegebenen Bedingungen, insbesondere der Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung (6.4) entsprechen. Spezielle Funktionen $g(P, Q)$, die als Funktionen von Q bzw. P der Schwingungsgleichung (2.4a) bzw. (2.4b) genügen, kann man leicht erhalten. Eine solche Funktion $g(P, Q)$ wird z.B. durch ein Produkt aus einer Lösung der Schwingungsgleichung (2.4a) und einer solchen der Schwingungsgleichung (2.4b) dargestellt. Solche Funktionen ergeben sich ferner, wenn man von einer Lösung $f(x, y, z)$ der Schwingungsgleichung in den Koordinaten x, y, z ausgeht und $x = x_P - x_Q$, $y = y_P - y_Q$, $z = z_P - z_Q$

---

[2] Daß die Verwendung der Absolutbeträge in den beiden Bedingungen (6.6) nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist, ersieht man aus der Tatsache, daß sie sonst nicht einmal von der einfallenden Lichtwelle (3.1) erfüllt werden.

[3] Nebenbei sei bemerkt: Analoge Überlegungen kann man in dem Falle des ursprünglichen Helmholtz-Huygensschen Prinzips (2.1), (2.2) und (2.3) durchführen, wenn man etwa einen Teil F^* einer Fläche F ins Unendliche verlegt und zunächst davon absieht, daß $G_0(P, Q)$ die Gestalt (2.3) hat. Es zeigt sich dann, daß die Tatsache, daß die in (2.2) auftretende Funktion $u(Q)$ die normale Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung (6.3) erfüllt dadurch ermöglicht wird, daß die Sonde $G_0(P, Q)$ die Gestalt (2.3) hat und daher der verschärften Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung (6.5) genügt.

setzt. Summen der angegebenen speziellen Funktionen $g(P, Q)$ stellen dann ebenfalls Funktionen dar, die in den Koordinaten des Punktes Q bzw. P die Schwingungsgleichung (2.4a) bzw. (2.4b) erfüllen. Wenn man sich auf die Betrachtung der Beugungserscheinungen in dem Schattenhalbraum H_S beschränkt, so kann man sogar zulassen, daß $g(P, Q)$ als Funktion des Punktes Q oder P in dem Lichthalbıaume H_L irgendwelche Singularitäten aufweist, wenn sie nur keine Eigenschaften der Wellenbewegung im Schattenhalbraum H_S zur Folge haben, die dem experimentellen Tatbestand widersprechen.

§ 7. Darstellung der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz definierten Wellenbewegung im ganzen unendlichen Raume

Bisher haben wir das Verhalten der durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz (3.2) definierten Wellenbewegung nur in dem Schattenhalbraum H_S betrachtet. Es entsteht daher die Frage, ob man diese Wellenbewegung auch im ganzen unendlichen Raume angeben kann und wie sie gegebenenfalls beschaffen ist.

Um diese Frage zu beantworten muß man die Lösung der Schwingungsgleichung die im Schattenhalbraum H_S durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz (3.2) dargestellt wird, durch die die beugende Öffnung verschließende Fläche F hindurch in den Lichthalbraum H_L gemäß der Schwingungsgleichung analytisch fortsetzen. Zu diesem Zweck muß man die Fläche F in eine in H_L längs des beugenden Schirmes S verlaufende Fläche deformieren, die durch eine im Unendlichen befindliche Fläche F^{**} abgeschlossen wird. Das Integral über die Fläche F^{**} muß verschwinden. Wir setzen ja voraus, daß die einfallende Lichtwelle nur durch die Strahlung einer punktförmigen Lichtquelle L erzeugt wird. Dies wird erreicht, wenn, ebenso wie in § 3, $g(P, Q)$ als Funktion des Punktes Q im Unendlichen des Halbraumes H_L die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung (6.2) erfüllt.

Wir sind somit zu dem Schlusse gelangt, daß $g(P, Q)$, wenn wir es als eine Funktion von Q betrachten, im Endlichen überall regulär sein soll und im Unendlichen der Sommerfeldschen Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung genügen muß.

Nun kann man jedoch mit Hilfe des Helmholtz-Huygensschen Prinzips leicht beweisen (vgl. Rubinowicz 1966, S. 13), daß eine im ganzen unendlichen Raum eindeutige und reguläre Lösung der Schwingungsgleichung verschwinden muß, wenn sie im Unendlichen die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Dies ist auch physikalisch plausibel. Wenn nämlich eine Lösung der Schwingungsgleichung der Sommerfeldschen Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung genügt, so bedeutet dies, daß im Unendlichen nur aus dem Endlichen fortschreitende Wellen vorhanden sind. Da diese Energie mit sich forttragen, so muß im Endlichen eine Energiequelle, also eine Singularität vorhanden sein.

Da man gemäß unserer Problemstellung, auf das Erfülltsein der Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung von $g(P, Q)$ als Funktion von Q sowie auf das reguläre Verhalten dieser Funktion nicht verzichten kann, so muß man annehmen, daß in dem betrachteten Fall eine Energiequelle sein muß, die sich jedoch im physikalischen Raum nicht befinden darf. Man muß sie daher in ein nichtphysikalisches Raumexemplar eines Riemannschen

Raumes verlegen. Die Verzweigungslinien dieses Raumes (Analoga der Verzweigungspunkte einer Riemannschen Fläche) muß man dabei mit den beugenden Rändern zusammenfallen lassen. Ihr Vorhandensein darf ja keine physikalisch unbegründeten Singularitäten der Funktion $g(P, Q)$ zur Folge haben.

Bei der Deformation der die beugende Öffnung verschließenden Fläche F in den Lichthalbraum H_L hinein muß man die Lichtquelle L durch eine geschlossene Fläche F_L umgeben. Das Integral über diese Fläche F_L ergibt dann die einfallende Lichtwelle $(\exp ikr_{LP})/r_{LP}$ im Beobachtungspunkte P. Da das Integral über die im Unendlichen befindliche Fläche F^{**} verschwindet, so bleibt nur die Integration über die beleuchtete Seite des Schirmes S übrig und man erhält für das durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz definierte Wellenfeld auf Grund von (3.2) den im ganzen unendlichen Raum gültigen Ausdruck

$$u_K^*(L, P) = \frac{e^{ikr_{LP}}}{r_{PQ}} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \boldsymbol{n} \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} - \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \right] df_Q +$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \boldsymbol{n} \left[g_L(P, Q) \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} - \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \operatorname{grad}_Q g_L(P, Q) \right] df_Q. \tag{7.1}$$

Hier bedeutet $g_L(P, Q)$ den Wert der Funktion $g(P, Q)$ an der beleuchteten Seite des beugenden Schirmes S, wenn diese Funktion in ihrer Abhängigkeit von dem Punkte Q betrachtet wird. Die Normale $\boldsymbol{n}$ an den Schirm S ist in (7.1) in den Schattenhalbraum H_L hinein gerichtet.

Der Ausdruck (7.1) für die verallgemeinerte Kirchhoffsche Wellenbewegung kann auch erhalten werden, wenn man zu dem im Schattenhalbraum H_S für dieses Wellenfeld gültigen Ausdruck (3.2) die Beziehung

$$0 = \frac{e^{ikr_{LP}}}{r_{LP}} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S+F} \boldsymbol{n} \left[\frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} - \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{PQ}}}{r_{PQ}} \right] df_Q +$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S+F} \boldsymbol{n} \left[g_L(P, Q) \operatorname{grad}_Q \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} - \frac{e^{ikr_{LQ}}}{r_{LQ}} \operatorname{grad}_Q g_L(P, Q) \right] df_Q \tag{7.2}$$

hinzuaddiert. Sie wird erhalten, wenn man das verallgemeinerte Helmholtz-Huygenssche Prinzip (2.8) auf die einfallende Lichtwelle (3.1), den Lichthalbraum H_L und einen im Schattenhalbraum H_S liegenden Beobachtungspunt P anwendet. Es wird dann H_L von dem beugenden Schirm S, der die beugende Öffnung verschließenden Fläche F sowie einer im Unendlichen verlaufenden Fläche F^{**} begrenzt. Die Lichtquelle L muß dabei durch eine geschlossenene Fläche F_L aus dem Lichthalbraum H_L ausgeschieden werden. Da der Beobachtungspunkt P außerhalb des Lichthalbraumes H_L liegt, muß die Summe sämtlicher Flächenintegrale verschwinden. Die Integration über die Fläche F^{**} ergibt keinen Beitrag, da wir ja doch voraussetzen, daß die einfallende Lichtwelle (3.1) sowie auch $g(P, Q)$ als Funktion des Punktes Q im Unendlichen die Sommerfeldsche Endlichkeits- und Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Das Integral über die Fläche F_L ergibt den Wert der einfallenden Lichtwelle (3.1) im Beobachtungspunkte P. Es verbleiben daher schließlich nur die Integrale über die beiden Flächen S und F. Die Normalen $\boldsymbol{n}$ an diese Flächen sind in (7.2) ebenso wie in (7.1) in den Schattenhalbraum H_S hinein gerichtet, sie haben also einen zur Normalenrichtung an die Fläche F in (3.2) entgegengesetzten Richtungssinn. Dabei ist zu beachten, daß in (7.2) $g_L(P, Q)$ auf der die beugende Öffnung verschließenden Fläche F durch die Funktion $g(P, Q)$ zu ersetzen ist, da hier kein Schirm und daher auch kein Verzweigungsschnitt vorhanden ist.

Auf diesem Wege erhält man zunächst den Ausdruck (7.1) für die durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz dargestellte Wellenbewegung im Schattenhalbraum H_S. Daß dieser Ausdruck (7.1) auch im Lichthalbraum H_L verwendbar ist, folgt aus der Tatsache, daß er in H_L eine reguläre, gemäß der Schwingungsgleichung erfolgende analytische Fortsetzung der Wellenbewegung im Schattenhalbraum H_S darstellt.

Bei der Durchführung der analytischen Fortsetzung erkennt man, daß in Übereinstimmung mit der geometrischen Optik die einfallende Lichtwelle im ganzen Halbraum H_L nirgends verschwindet.

Der Ausdruck (7.1) ermöglicht uns auch die Frage zu beantworten, ob man für die durch den verallgemeinerten Kirchhoffschen Ansatz definierte Wellenbewegung $u_K(L, P)$ ein Reziprozitätstheorem angeben kann. Daß die durch die beiden ersten Glieder rechts in (7.1) dargestellte, durch den ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz definierte Wellenbewegung gegenüber der Vertauschung der beiden Punkte L und P, wenn der letztere im Schattenhalbraum H_S sich befindet, invariant ist, hat bereits v. Laue (1928) gezeigt (vgl. auch Rubinowicz 1966, S. 55). Hingegen ändert eine Vertauschung von L und P den Wert des dritten Gliedes in (7.1), so daß es nicht möglich ist für den ganzen Ausdruck (7.1) ein Reziprozitätstheorem zu erhalten.

Man kann sich selbstverständlich die Frage vorlegen, ob man nicht bereits mit Hilfe bekannter Lösungen der Schwingungsgleichung brauchbare $g(P, Q)$-Funktionen herstellen kann. Im Falle des Kirchhoffschen Beugungsproblems an einer Halbebene könnte man z. B. an die Verwendung der Lösung des skalaren Sommerfeldschen Beugungsproblems an einem Keil mit einem beliebigen Außenwinkel denken. Leider kann man diese Lösung nicht verwenden, wenn man in ihr $x = x_P - x_Q$, $y = y_P - y_Q$, $z = z_P - z_Q$ setzt, da ja dann die so hergestellte $g(P, Q)$-Funktion Singularitäten aufweist, während wir doch in allen bisherigen Überlegungen vorausgesetzt haben, daß sie als Funktion der beiden Punkte P und Q regulär ist. Sei nämlich x, y, z ein kartesisches Koordinatensystem, dessen z-Achse mit der beugenden Kante zusammenfällt. Diese bildet dann eine durch eine Gerade gegebene Verzweigungslinie eines Riemannschen Raumes in der die Sommerfeldsche Lösung eine singuläre Stelle besitzt. Um eine $g(P, Q)$-Funktion aus der Sommerfeldschen Lösung zu erhalten, kann man in ihr, wie in § 6 angegeben wurde, $x = x_P - x_Q$, $y = y_P - y_Q$, $z_P - z_Q$ setzen. Nähern sich nun die x_P, y_P-Koordinaten des Beobachtungspunktes P den x_Q, y_Q-Koordinaten des Integrationspunktes Q auf dem beugenden Schirme, so verschwinden die Werte von $x = x_P - x_Q$ und $y = y_P - y_Q$ so daß sich in der Sommerfeldschen Lösung die x, y-Koordinaten der Verzweigungslinie, also einer singulären Stelle nähern. Dies findet insbesondere statt, wenn der Beobachtungspunkt P sich einem beliebigen Integrationspunkte Q auf dem beugenden Schirme nähert, weil ja dann im Grenzfall alle Koordinaten des Punktes P mit denen des Punktes Q zusammenfallen.

Ebenso kann man zur Herstellung der Funktionen $g(P, Q)$ in Riemannschen Räumen nicht irgendwelche von x, y, z abhängige Lösungen der Schwingungsgleichung benützen indem man x, y, z durch $x_P - x_Q$, $y_P - y_Q$, $z_P - z_Q$ ersetzt. Auch in diesem Falle ergeben sich Verzweigungsstellen der $g(P, Q)$-Funktionen wenn die x, y, z-Werte: $x = x_P - x_Q$, $y = y_P - y_Q$, $z = z_P - z_Q$ mit irgendwelchen Punkten einer Verzweigungslinie zusammenfallen.

Damit soll jedoch selbstverständlich nicht gesagt sein, daß man nicht verzweigte Lösungen der Schwingungsgleichung in einer anderen Weise zur Herstellung von brauchbaren $g(P, Q)$-Funktionen verwenden kann, z. B. durch Produktbildung aus einer von den Koordinaten des Punktes P und einer von den Koordinaten des Punktes Q abhängigen Lösung der Schwingungsgleichung, wie dies in § 6 angegeben wurde.

Eine unumgänglich notwendige Forderung, die man an die Wahl einer geeigneten $g(P, Q)$-Funktion zu stellen hat, ist jedoch die daß durch sie die Darstellung der durch den ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz definierten Wellenbewegung tatsächlich verbessert wird. Leider ist es wohl nicht möglich allgemeine Kriterien für die Wahl einer solchen Funktion $g(P, Q)$ anzugeben. Sicherlich muß man jedoch nicht dabei nur die oben angegebenen Forderungen, sondern auch die Eigenschaften der Beugungswelle $u_{B0}(L, P)$ beachten, die in der durch den ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz gegebenen Wellenbewegung auftritt. Um für diese Beugungswelle $u_{B0}(L, P)$ einen angenäherten Ausdruck zu erhalten kann man sich, mit Ausnahme der Umgebung von gewissen Beobachtungspunkten P, der Methode der stationären Phase bedienen. In dem Ausdruck (5.5) für die Beugungswelle $u_{B0}(L, P)$ unterliegt nämlich der Faktor $\exp ik(r_{LQ} + r_{PQ})$ im allgemeinen sehr raschen Schwankungen mit Rücksicht darauf, daß in der Optik $k = 2\pi/\lambda$ eine sehr große Zahl ist. Dadurch werden im allgemeinen die Beiträge der einzelnen Elemente des beugenden Randes zur gesamten Beugungswelle durch Interferenz vernichtet. Die größten Beiträge liefern daher nur die Umgebungen derjenigen Punkte am beugenden Rande, in denen $r_{LQ} + r_{PQ}$ sich am langsamsten ändert, wo also

$$\frac{\partial}{\partial s_Q}(r_{LQ} + r_{PQ}) = 0$$

ist. In diesen sogenannten wirksamen Punktes wird die einfallende Lichtwelle, ähnlich wie an einem dünnen Draht, in Reflexionskegeln reflektiert (Rubinowicz 1924; 1966, S. 169 f.). Die Existenz der wirksamen Punkte wird durch die Erfahrung bestätigt, da ihr Vorhandensein bereits mit dem bloßen Auge feststellbar ist. Durch die mit Hilfe der Methode der stationären Phase erhaltene Näherung werden im allgemeinen (bis auf die eventuell vorhandenen Beobachtungspunkte P, für die die Methode der stationären Phase nicht anwendbar ist) die Beugungserscheinungen befriedigend dargestellt.

Je nach der Wahl von $g(P, Q)$ kann nun auf die Beugungswelle $u_{B1}(L, P)$ (5.4b) die Methode der stationären Phase anwendbar sein oder auch nicht (vgl. Rubinowicz 1969). Im Falle wo sie anwendbar ist, kann sie die gleichen wirksamen Punkte am beugenden Rande besitzen wie die Beugungswelle $u_{B0}(L, P)$, (5.4a) oder (5.5), des ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatzes oder sie kann auch andere wirksame Punkte aufweisen. Im ersten Falle würden keine neuen wirksamen Punkte beobachtbar sein, wenn auch die Beiträge dieser Punkte eine Änderung erfahren müßten. In diesem Falle müßte $g(P, Q)$ einen von $r_{LQ} + r_{PQ}$ abhängigen, sich beim Fortschreiten längs des beugenden Randes schnell ändernden Faktor enthalten. Im zweiten Falle, wo $g(P, Q)$ neue wirksame Punkte verursacht, müßten sie beobachtbar sein, selbst wenn sie schwach sein würden, was jedoch bisher nicht festgestellt wurde. Im Falle wo $g(P, Q)$ keine wirksamen Punkte verursacht, müßte man im allgemeinen die Beiträge des ganzen beugenden Randes in Betracht ziehen.

Zum Abschluß der vorliegenden Untersuchung mag noch bemerkt werden, daß die Übereinstimmung der durch den ursprünglichen Kirchhoffschen Ansatz definierten Wellenbewegung mit der in Wirklichkeit stattfindenden am besten ist in der Nähe der Schattengrenze, in weiterer Entfernung vom beugenden Rande. Es ist daher eine Verbesserung der ursprünglichen Kirchhoffschen Wellenbewegung vor allem in den übrigen Raumpunkten wünschenswert. Eine Befriedigung der Randbedingungen am beugenden Schirm kann man bekanntlich im Schattenhalbraum H_S erreichen, wenn man die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ so wählt, daß das Elementargesetz $G(P, Q)$ (2.3a) in eine Greensche Funktion des Schattenhalbraumes H_S des Raumgebietes übergeht, in dem das Beugungsproblem vorgegeben ist. Von dieser Möglichkeit hat bereits Sommerfeld (vgl. Rubinowicz 1917; 1966, S. 63) in seinen Vorlesungen über die Optik im Falle von ebenen beugenden Schirmen Gebrauch gemacht. In diesem Falle hat nämlich die Greensche Funktion eine besonders einfache Gestalt, da ja dann der Schattenhalbraum H_S durch einen, durch eine volle Ebene begrenzten Halbraum gegeben wird. Alle durch Greensche Funktionen für den Schattenhalbraum H_S definierten, verallgemeinerten Kirchhoffschen Wellenbewegungen besitzen jedoch, unabhängig von der Gestalt des Raumgebietes für das sie vorgegeben sind, den Nachteil, daß sie in der die beugende Öffnung verschließenden Fläche F allein durch die einfallende Lichtwelle bestimmt werden, sich also hier der Einfluß der Beugungswelle nicht geltend macht. Ferner kann man nicht erwarten, daß eine gemäß der Schwingungsgleichung erfolgende Fortsetzung dieser Wellenbewegung durch die Beugungsöffnung F in den Lichthalbraum H_L hinein, die Wellenbewegung in diesem Raumgebiet befriedigend darstellt. Man kann sich davon an dem Beispiel der Sommerfeld-Kirchhoffschen Beugungsprobleme an ebenen Schirmen überzeugen. Die geometrisch-optische Welle der in dem Halbraum H_L stattfindenden Wellenbewegung, die durch die analytische Fortsetzung der Welle im Schattenhalbraum H_S erhalten wird, besteht dann aus der direkt einfallenden und der durch sie verursachten, am beugenden Schirme S reflektierten Welle. Ferner tritt hier, außer der zur Schattengrenze der einfallenden Welle gehörigen Beugungswelle noch eine weitere hinzu, die der Schattengrenze der reflektierten Welle zugeordnet ist. Wenn nun an der Schattenseite des ebenen Schirmes z. B. die Randbedingung $u = 0$ befriedigt wird, so genügen ihr an der Licht- und Schattenseite des beugenden Schirmes die beiden Beugungswellen. An der Lichtseite des Schirmes wird jedoch von der geometrisch-optischen Wellenbewegung die Randbedingung $\partial u/\partial n = 0$ (Rubinowicz 1917; 1966, S. 96) erfüllt. Man kann daher nicht erwarten, daß im Falle eines beliebig gestalteten beugenden Schirmes auch nur die geometrisch-optische Wellenbewegung an seiner beleuchteten Seite die an seiner beschatteten Seite vorgeschriebene Randbedingung erfüllt.

Um das Verhältnis der soeben betrachteten Sommerfeld-Kirchhoffschen Wellenbewegung zu der durch (3.1) beschriebenen aufzuklären, bemerken wir folgendes: Die Greensche Funktion $G(P, Q)$ eines Halbraumes hat die Gestalt

$$G(P, Q) = G_0(P, Q) \pm G_0(P', Q). \tag{7.3}$$

Die Funktion $G_0(P, Q)$ wird hier durch (2.3a) definiert, während $G_0(P', Q)$ durch die gleiche Funktion dargestellt wird, wenn wir in ihr den Punkt P durch sein Spiegelbild P' in der den Halbraum begrenzenden Ebene ersetzen. Das Plus- bzw. Minuszeichen ist im Falle der Randbedingung $\partial G(P, Q)/\partial n_Q = 0$ bzw. $G(P, Q) = 0$ zu verwenden.

Wird (7.3) mit dem Elementargesetz $G(P, Q)$ (2.3a) verglichen, so erhält man für $g(P, Q)$ den Ausdruck

$$g(P, Q) = \pm G_0(P', Q). \tag{7.4}$$

Es wird somit $g(P, Q)$ in dem betrachteten Falle nicht durch eine verzweigte Lösung der Schwingungsgleichung dargestellt. Sie entspricht somit nicht den Anforderungen, die wir an die Zusatzfunktion $g(P, Q)$ in unseren allgemeinen Überlegungen gestellt haben. Diese bezogen sich ja doch auf $g(P, Q)$-Funktionen, die im ganzen unendlichen physikalischen Raume regulär waren, während (7.4) sich nur im Schattenhalbraum H_S nicht aber im Lichthalbraum H_L regulär verhält. Trotzdem war es selbstverständlich möglich die Lösung des verallgemeinerten Sommerfeld-Kirchhoffschen Beugungsproblems mit der Zusatzfunktion (7.4) in den Lichthalbraum H_L der Schwingungsgleichung gemäß fortzusetzen. Während jedoch in der Wellenbewegung (3.1) die geometrisch-optische Welle nur durch die direkt einfallende Welle gegeben wird, tritt in der Sommerfeld-Kirchhoffschen Lösung noch eine reflektierte Welle auf. Daraus ist zu ersehen, daß wenn man $g(P, Q)$-Funktionen verwendet, die nur im Schattenhalbraum H_S regulär sind, man sie zwar im allgemeinen in den Lichthalbraum H_L gemäß der Schwingungsgleichung fortsetzen kann, man jedoch in H_L eventuell eine geometrisch-optische Wellenbewegung erhält, die nicht nur aus der einfallenden Welle besteht, wie wir dies in unseren allgemeinen Überlegungen vorausgesetzt haben. Bei der Verwendung einer Greenschen Funktion des Schattenhalbraumes H_S wird insbesondere im allgemeinen die Begrenzung dieses Halbraumes der Einfachheit halber so gewählt werden, daß in ihr die Ränder der Beugungsöffnung nicht hervortreten und daher die der Greensche Funktion $G(P, Q)$ entsprechende $g(P, Q)$-Funktion hier keine Verzweigungsstellen aufweisen wird.

LITERATURVERZEICHNIS

Niewodniczański, H., *C., R. Acad. Sci.* (Paris), **198**, 2159 (1934).

Miyamoto, K., Wolf, E. *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**, 615 (1962a).

Miyamoto, K., Wolf, E. *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**, 626 (1962b).

Laue von, M., *Interferenz und Beugung elektromagnetischer Wellen (mit Ausnahme der Röntgenstrahlen)*, Handb. Exp. Physik Bd. **18**, 211–361, Akad. Verlagsges., Leipzig 1928.

Rubinowicz, A., *Ann. Phys.* (Leipzig), **53**, 257 (1917).

Rubinowicz, A., *Ann. Phys.* (Leipzig), **73**, 339 (1924).

Rubinowicz, A., *Acta Phys. Polon.*, **21**, 61 (1962),

Rubinowicz, A., *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*, zweite Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York; PWN, Warszawa 1966.

Rubinowicz, A., *Acta Phys. Polon.*, **36**, 59 (1969).