

SPINWELLENMODEN IN EINEM FERROMAGNETISCHEN QUADER

Spin-Wave Modes in a Ferromagnetic Rectangular Prism

VON F. GOEDSCHE, G. HEBER

Sektion Physik, Technische Universität Dresden*

UND H. WENZEL

Sektion Mathematik, Technische Universität Dresden

(Eingegangen am 15. Dezember, 1969)

Die phänomenologische Spinwellentheorie wird benutzt, um das Spinwellenspektrum in einem ferromagnetischen Quader in Abhängigkeit von der Geometrie und der Randbedingung zu berechnen. Beim Vorhandensein eines teilweisen Spin-pinnings auf der Oberfläche treten Oberflächenmoden auf, deren Eigenschaften stark von der Art der Oberflächenanisotropie abhängen.

1. Einleitung

Im Zusammenhang mit Überlegungen zum Spinwellenspektrum in ferromagnetischen Legierungen [1] wird hier ein ganz spezielles Modell diskutiert, welches den Vorzug besitzt, in einer übersichtlichen Näherung lösbar zu sein. Es handelt sich um einen ferromagnetischen Quader, der in eine paramagnetische Matrix eingebettet sei. Eine solche Struktur kommt beispielsweise in den Systemen Fe-Al, Pt-Fe, Cu-Ni-Fe und in Alnico-Legierungen [2] vor, wenn sich eine gewisse Inselstruktur ausbildet.

Als Grenzfälle werden hier aber auch eine ebene, dünne ferromagnetische Schicht oder ein langer ferromagnetischer Stab erfaßt.

Bei der Durchführung der Rechnungen werden folgende Voraussetzungen gemacht:

1) Die phänomenologische Spinwellentheorie sei anwendbar, d.h. die Kantenlängen des Quaders müssen viele Gitterkonstanten betragen.

2) Die Grenzflächen zwischen Quader und Matrix seien ideal eben und völlig scharf definiert.

3) Das Magnetfeld im Inneren des Quaders wird durch ein homogenes Feld approximiert.

4) Wechselwirkungsprozesse der Spinwellen werden vernachlässigt.

* Adresse: Sektion Physik, Technische Universität, Dresden, DDR.

5) Die Randbedingung auf der Oberfläche des Quaders wird in der Gestalt

$$d_1 m + d_2 \frac{\partial m}{\partial n} = 0 \quad (1)$$

geschrieben, mit $m \equiv m_x + im_y$, und $\partial/\partial n$ als Ableitung nach der äußeren Normalen. Die Form der Randbedingung (1) und die physikalische Bedeutung der Parameter d_1 und d_2 wird im Anhang 1 erläutert.

Es ist klar, daß alle diese Voraussetzungen in Wirklichkeit nicht streng erfüllt sind. Man kann annehmen, daß es Fälle in der Natur gibt, welche diesen Voraussetzungen genügend nahe kommen, so daß unsere Rechnungen dann eine brauchbare Näherung darstellen.

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist es, unter den oben genannten Voraussetzungen das Spinwellenspektrum im Quader in seiner Abhängigkeit von der Geometrie und von der Randbedingung (1) zu ermitteln. Besonders interessant sind die für bestimmte Werte der Parameter d_1 und d_2 auftretenden Oberflächen-Spinmoden. Die Eigenschaften dieser Moden hängen sehr stark vom Verhältnis d_1/d_2 ab, so daß man eine Information über die tatsächlichen Verhältnisse an den Oberflächen (Grad des Spin-pinnings bzw. Oberflächenanisotropie) erhalten könnte, wenn es gelänge, die Oberflächenmoden auszumessen.

Ähnliche Rechnungen wurden von Heiner [3] für den Fall einer ferromagnetischen Kugel in einer paramagnetischen Matrix durchgeführt. Diese Rechnungen zeigten, daß bei einer solchen Struktur Kugel-Spinwellen existieren sollten.

Während die hier benutzte Spinwellennäherung (Vernachlässigung der Dipol-Dipol-Wechselwirkung der angeregten Spins) für einen Wellenlängenbereich von etwa 20–300 Gitterkonstanten brauchbar ist, werden die magnetostatischen Moden bei noch größeren Wellenlängen (10^3 – 10^5 Gitterkonstanten) wesentlich. Für solche Wellenlängen ist die Austauschenergie vernachlässigbar. Damon und Eshbach [4] haben das Spektrum der magnetostatischen Moden für eine unendlich ausgedehnte Schicht berechnet. Eine andere Methode, den Grad des Spin-pinnings an den Oberflächen der Probe zu untersuchen, haben Sparks, Tittmann *et al.* [5] entwickelt. Sie berücksichtigen in ihrer Theorie sowohl Austauschwechselwirkung als auch Dipol-Dipol-Wechselwirkung. Zur Lösung der zugehörigen Gleichungen wird ein Variationsverfahren benutzt, wobei die Art des Spin-pinnings im Ansatz einer geeigneten Versuchsfunktion enthalten ist. Das Verhalten des magnetostatischen Anteils zur Frequenz ω (magnetostatische Moden) gibt im Vergleich mit dem Experiment Aufschluß über die Art des Spin-pinnings an den Oberflächen der Probe.

Eine Theorie zum Oberflächen-Spin-pinning, die darauf beruht, daß der Betrag der Sättigungsmagnetisierung in einer schmalen Oberflächenzone kleiner ist als im Volumengebiet, wurde von Sparks [6] angegeben.

2. Grundgleichung und Randbedingung

Wir verwenden die Bewegungsgleichung der linearisierten phänomenologischen Spinwellentheorie in der einfachsten Form:

$$(\Delta + \kappa(\omega))m(\mathbf{r}) = 0 \quad (2)$$

mit

$$\kappa(\omega) = \frac{1}{MB} (\omega/\gamma - H_i).$$

Hierbei ist $m \equiv m_x + im_y$, M der Betrag der Sättigungsmagnetisierung, B die Austauschkonstante, γ das gyromagnetische Verhältnis und H_i das innere Magnetfeld im Ausgangszustand $M = M\mathbf{e}_z$. Dieses innere Feld enthält ein äußeres Magnetfeld und das Entmagnetisierungsfeld. Das Entmagnetisierungsfeld ist in Strenge inhomogen; es soll hier durch ein gemittelttes homogenes Feld in z -Richtung ersetzt werden [7].

Eine Dämpfung der Spinwellen wird der Einfachheit halber nicht betrachtet, desgleichen wird die magnetostatische Wechselwirkung der angeregten Spins vernachlässigt. Als Randbedingung auf der Quaderoberfläche verwenden wir Gl. (1), die das Auftreten eines mehr oder weniger ausgeprägten Spin-pinnings zuläßt (siehe Anhang 1).

3. Lösung des Randwertproblems

Zur Lösung von (2) empfiehlt sich der Separationsansatz

$$m(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (3)$$

Es genügt, zunächst nur eine Komponente zu betrachten. Die Lösung für den x -abhängigen Anteil hat die Gestalt

$$X(x) = C_1 e^{ik_x x} + C_2 e^{-ik_x x}, \quad (4)$$

wobei k im allgemeinen komplex ist.

Mit analogen Ansätzen für $Y(y)$ und $Z(z)$ folgt aus (2) die Dispersionsrelation

$$\omega = \gamma MB [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2] + \gamma(H_a + \langle H_e \rangle). \quad (5)$$

(Die Berücksichtigung der magnetostatischen Wechselwirkung der angeregten Spins führt zu einer leichten Verschiebung im Anfang der Dispersionskurve ($|\mathbf{k}| \rightarrow 0$).

Die Anpassung der Lösung (4) an die Randbedingung bei $x = 0$ und $x = a$ führt auf die transzendente Gleichung

$$e^{i\tilde{k}a} = \pm \frac{\tilde{k} + i\lambda}{\tilde{k} - i\lambda} \quad (6)$$

mit $\tilde{k} = ak_x$, $\lambda = ad_1/d_2$ und a als Quaderlänge in x -Richtung. Die Größe λ ist reell, kann aber positiv und negativ sein. Aus Gl. (6) ist das erlaubte \tilde{k} -Spektrum zu bestimmen. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften dieser Gleichung genügt es, Lösungen mit $\text{Re } \tilde{k} \geq 0$ und $\text{Im } \tilde{k} \geq 0$ aufzusuchen. In zwei Sonderfällen kann man komplexe \tilde{k} -Eigenwerte sofort ausschließen:

- 1) $\lambda = 0$ (freie Oberflächenspins)
- 2) $\lambda \rightarrow \infty$ (vollständiges Spin-pinning auf der Oberfläche).

In diesen beiden Fällen entsteht aus (6) einfach

$$e^{i\tilde{k}a} = \pm 1, \quad (6a)$$

also

$$\tilde{k} = k_x a = n\pi \quad \text{mit } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

(Natürlich wird Gl.(2) eine schlechte Näherung, wenn n zu groß wird.)

Bemerkenswert ist, daß in beiden Grenzfällen dasselbe \tilde{k} -Spektrum erscheint (die zugehörigen Eigenfunktionen sind in der Phase um $\pi/2$ gegeneinander verschoben).

In (7) ist auch dasjenige \tilde{k} -Spektrum enthalten, welches man aus der Forderung nach periodischer Fortsetzbarkeit der Lösungen $X(x)$ erhält. Ein solches Spektrum hat Abbel [8] zur Berechnung von Sättigungsmagnetisierung und Curietemperatur kleiner Teilchen verwendet.

Falls $\lambda \neq 0, \infty$, lassen sich die Sonderfälle für reelles und imaginäres \tilde{k} leicht überblicken. Für reelles \tilde{k} erscheint es zweckmäßig, Gl. (6) umzuformen in die Gestalt

$$\tan \tilde{k} = \frac{2\lambda\tilde{k}}{\tilde{k}^2 - \lambda^2}. \quad (8)$$

Diese transzendente Gleichung besitzt für beide Vorzeichen von λ unendlich viele Lösungen, die man beispielsweise graphisch konstruieren kann.

Für imaginäres \tilde{k} setzen wir $\tilde{k} = i\tau$ und erhalten aus (6) die Beziehung

$$e^{-\tau} = \pm \frac{\tau + \lambda}{\tau - \lambda}. \quad (9)$$

Durch graphische Konstruktion erkennt man leicht, daß es für $\lambda > 0$ keine Lösungen von (9) gibt, wohl aber für $\lambda < 0$. Die ermittelten Lösungen $\tau = \tau(\lambda)$ ($\tau \neq 0$) liegen je nach dem Vorzeichen in Gl. (9) auf den in Abbildung 1 dargestellten Kurven.

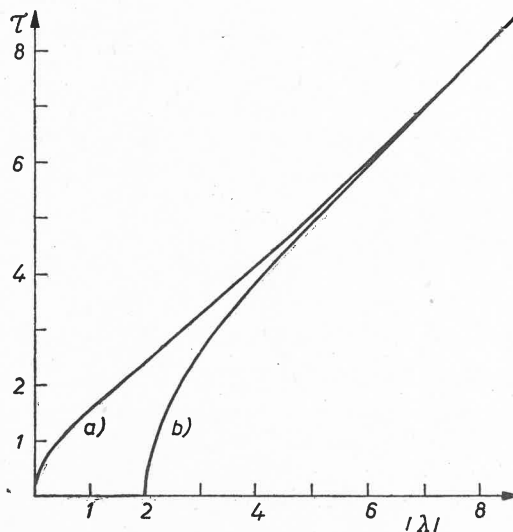


Abb. 1. Lösungen $\tau(\lambda)$ mit $\tau \neq 0$ von a) $e^{-\tau} = + \frac{\tau - |\lambda|}{\tau + |\lambda|}$ und b) $e^{-\tau} = - \frac{\tau - |\lambda|}{\tau + |\lambda|}$.

Für $|\lambda| \geq 10$ gilt in sehr guter Näherung die Lösung $\tau = |\lambda|$.

Die Lösungen mit imaginärem \tilde{k} sind Oberflächenmoden; ihre analytische Darstellung ergibt sich aus dem Ansatz (4):

$$X(x) = C \left[e^{-\tau \frac{x}{a}} \pm e^{-\tau \left(1 - \frac{x}{a}\right)} \right] \quad (10)$$

für positives bzw. negatives Vorzeichen in (9). Diese Funktionen sind symmetrisch bzw. antisymmetrisch um $x = a/2$. Die antisymmetrische Oberflächenmode ist jedoch durch ein homogenes Mikrowellenfeld nicht anregbar, da ihr Dipolmoment verschwindet ($\int dV m(\mathbf{r}) = 0$).

Es bleibt die Frage zu untersuchen, ob Gl. (6) außerdem noch komplexe Lösungen besitzt. Der Gang der Überlegungen wird im Anhang 2 skizziert. Das Resultat ist negativ, d.h. es gibt keine weiteren Lösungen von (6) in der komplexen \tilde{k} -Ebene.

4. Diskussion

Die Betrachtungen, die für den x -abhängigen Anteil der Funktion $m(\mathbf{r})$ durchgeführt wurden, lassen sich in analoger Weise auf die y - und z -Komponente übertragen. Die im Prinzip möglichen Moden mit zwei oder drei imaginären k -Komponenten fallen etwas aus dem Rahmen der hier benutzten Näherung, da solche Moden an den Kanten und Ecken des Quaders lokalisiert sind, dort aber die Näherung eines homogenen inneren Feldes parallel zur z -Achse schlecht ist.

Das Spektrum der k -Eigenwerte ist auf Grund der Kontinuumsnäherung beschränkt. Insbesondere darf bei den Oberflächenzuständen (10) das Abklingen nicht innerhalb weniger Gitterkonstanten erfolgen. Das Auftreten von Oberflächenmoden ist in dieser Näherung deshalb mit einem teilweisen Spin-pinning auf der Oberfläche des Körpers verknüpft.

Die Berechnung der magnetostatischen Moden durch Damon und Eshbach [4] für eine unendlich ausgedehnte Schicht zeigt ebenfalls die Existenz von Oberflächenmoden. Diese Moden haben jedoch eine andere physikalische Ursache als die hier behandelten Oberflächenmoden. In den magnetostatischen Oberflächenmoden drückt sich eine Eigenschaft der Dipol-Dipol-Wechselwirkung aus. Beide Arten von Oberflächenmoden unterscheiden sich auch durch ihre unterschiedlichen Frequenzbereiche.

Wie aus der Dispersionsrelation (5) ersichtlich, bewirken imaginäre k eine Erniedrigung der zugehörigen Frequenzen unter den Bereich der Volumenmoden (reelle k). Zu jeder Oberflächenmode gehört hier ein ganzes Band von k -Werten, da (falls k_x imaginär) k_y und k_z das Spektrum der erlaubten reellen Werte durchlaufen können usw. Im magnetostatischen Falle erstreckt sich das Frequenzband der Volumenmoden nach Damon und Eshbach über das Intervall

$$\gamma H_i < \omega < \gamma H_i \sqrt{1 + M/\mu_0 H_i}.$$

Daneben bilden die Oberflächenmoden eine einzelne Frequenz-Fläche in Abhängigkeit der Komponenten des k -Vektors. Diese Frequenzen liegen im Intervall

$$\gamma H_i \sqrt{1 + M/\mu_0 H_i} < \omega < \gamma H_i \left[1 + \frac{1}{2} M/\mu_0 H_i \right],$$

also oberhalb des Bereiches der Volumenmoden. Man kann deshalb annehmen, daß eine Berücksichtigung der magnetostatischen Wechselwirkung für die hier betrachteten Oberflächenmoden Beiträge liefert, welche der Erniedrigung des Frequenzspektrums entgegenwirken. Magnetostatische Oberflächenmoden konnten bereits in dünnen Einkristall-YIG-Filmen experimentell nachgewiesen werden [9].

ANHANG 1

Stellt man die Magnetisierung \mathbf{M} in der Form

$$\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z + \mathbf{m} \quad (\text{A1})$$

mit $|\mathbf{m}| \ll M$ und $\mathbf{e}_z \mathbf{m} = 0$ dar, so erhält man nach Rado und Weertman [10] folgende in den kleinen Größen \mathbf{m} lineare Randbedingung

$$M B \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n} + \mathbf{T}_s = 0. \quad (\text{A2})$$

Dabei ist \mathbf{T}_s die Dichte des Oberflächendrehmomentes, das durch eine Oberflächenanisotropie hervorgerufen wird. Die analytische Form von \mathbf{T}_s hängt selbstverständlich von der Art der Oberflächenanisotropie ab.

Wählen wir für die Oberflächen-Anisotropieenergie speziell die Ausdrücke

$$a) \quad E_s = \frac{1}{2} K_s \int df (\mathbf{e}_z \mathbf{M})^2$$

und

$$b) \quad E_s = \frac{1}{2} K_s \int df (\mathbf{e}_z \times \mathbf{M})^2 \quad (\text{A3})$$

(K_s , Oberflächen-Anisotropiekonstante), so ergeben sich durch Variation bezüglich der Magnetisierung und anschließender Linearisierung [11] die Randbedingungen

$$a) \quad B \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n} - K_s \mathbf{m} = 0$$

$$b) \quad B \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n} + K_s \mathbf{m} = 0. \quad (\text{A4})$$

Die Beziehungen (A3, a), (A4, a) beschreiben den Fall, daß auf der Oberfläche des Körpers die z -Achse eine „schwere Richtung“ der Magnetisierung ist, während (A3, b) und (A4, b) dagegen die z -Achse als „leichte Richtung“ auszeichnen.

Mit $m \equiv m_x + im_y$ läßt sich der Zusammenhang zur Randbedingung (1) leicht herstellen, und man erhält

$$d_1 = \mp K_s \quad \text{und} \quad d_2 = B \quad (K_s, B > 0).$$

ANHANG 2

Um komplexe Lösungen von Gl. (6) aufzusuchen, ist es vorteilhaft, in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Parameters λ die konformen Abbildungen zu betrachten, die linke und rechte Seite dieser Gleichung vermitteln. Das Gebiet $\text{Re } \tilde{k} \geq 0, \text{Im } \tilde{k} \geq 0$ der komplexen \tilde{k} -Ebene wird im Falle $\lambda > 0$ von der linken Seite der Gl. (6) auf die Einheitskreisscheibe abgebildet, während die rechte Seite auf das Gebiet außerhalb der Einheitskreisscheibe abbildet. Daraus ist ersichtlich, daß für $\lambda > 0$ neben den auf dem Einheitskreis liegenden reellen Lösungen keine komplexen \tilde{k} als Lösungen auftreten.

Für $\lambda < 0$ genügt eine solche Betrachtung nicht, da in diesem Falle beide Seiten von Gl. (6) auf die Einheitskreisscheibe abbilden. Es läßt sich lediglich die Existenz von reellen und rein imaginären Lösungen \tilde{k} folgern. Um etwas über die Existenz weiterer komplexer Lösungen auszusagen, ist es zweckmäßig, eine Transformation von Gl. (6) vorzunehmen. Wir schreiben (6) in der Gestalt

$$w_1(\tilde{k}) = w_2(\tilde{k}). \quad (\text{A5})$$

Die Beziehung

$$f[w_1(\tilde{k})] = f[w_2(\tilde{k})] \quad (\text{A6})$$

ist dann äquivalent zu (A5), wenn f eine eindeutige Funktion ist. Benutzt man für eine solche Funktion f die Umkehrfunktion gemäß

$$f[w_2(\tilde{k})] = \tilde{k},$$

läßt sich aus (A6) leicht folgern, daß keine weiteren komplexen Lösungen \tilde{k} auftreten.

LITERATUR

- [1] G. Heber, *Acta Phys. Austriaca*, **30**, 83 (1969); preprint *On the connection between atomic ordering and spin-wave-spectrum of a ferromagnetic alloy*, TU Dresden 1968.
- [2] H. Warlimont, H. Mühe, H. Gengnagel, *Z. Angew. Phys.*, **26**, 301 (1969); O. Henkel, *Phys. Status Solidi*, **7**, 919 (1964); *Z. Angew. Phys.*, **21**, 32 (1966); E. Biedermann, E. Kneller, *Z. Metallkde*, **47**, 289, 760 (1956); K. J. De Vos, *Dissertation: The relationship between microstructure and magnetic properties of Alnico alloys*, TH Eindhoven 1966.
- [3] E. Heiner, *Diplomarbeit*, TU Dresden 1969.
- [4] R. W. Damon, J. R. Eshbach, *J. Phys. Chem. Solids*, **19**, 308 (1961).
- [5] M. Sparks, B. R. Tittmann, C. Newkirk, *Phys. Letters*, **28A**, 131 (1968); M. Sparks, B. R. Tittmann, J. E. Mee, C. Newkirk, *J. Appl. Phys.*, **40**, 1518 (1969).
- [6] M. Sparks, *Phys. Rev. Letters*, **22**, 1111 (1969).
- [7] R. I. Joseph, E. Schlömann, *J. Appl. Phys.*, **36**, 1579 (1965); *J. Appl. Phys.*, **38**, 2405 (1967).
- [8] R. Abbel, *Z. Angew. Phys.*, **20**, 212 (1966); **22**, 296 (1967).
- [9] W. Bongianini, J. H. Collins, F. Pizzarello, D. A. Wilson, *IEEE G-MTT Symposium Digest*, Dallas, Texas 1969.
- [10] G. T. Rado, J. R. Weertman, *J. Phys. Chem. Solids*, **11**, 315 (1959).
- [11] W. F. Brown, *Micromagnetics*, New York, London 1963; F. Goedsche, preprint *Micromagnetic boundary conditions in inhomogeneous alloys*, TU Dresden 1969, submitted to *Acta Phys. Polon.*