Vol. A37 (1970) ACTA PHYSICA POLONICA Fasc. 1

ОДНОЗНАЧНОСТЬ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Uniqueness of Axiomatic Definition of Energy-Momentum Tensor and Angular Momentum of Hydrodynamic Motion and Electromagnetic Field

Ч. Янкевич

Выжша Школа Педагогична, Жешув*

(*Поступила в редакцию* **30** *июня* **1969**)

Показано, что из аксиоматического определения сохраняющихся токов данного в работе [1], тензоры энергии-импульса и момента количества движения гидродинамического и электромагнитного поля определяются с точностью до двух постоянных и совпадают с общепринятыми.

1. *Введение*

В работе [1] дано аксиоматическое определение сохраняющихся токов для уравнений поля инвариантных при преобразованиях m — параметрической группы Ли. Согласно этому определению величины $T^{\alpha}_{a}(x)$ образуют сохраняющиеся токи если:

а). $T^{\alpha}_{a}(x)$ являются релятивистскими функциями состояния с законом преобразования

$$T'^{\alpha}_{a} = T^{\alpha}_{a} + \left(T^{\varrho}_{a} \frac{\partial x^{\alpha}_{|b}}{\partial x^{\varrho}} - T^{\alpha}_{a} \frac{\partial x^{\varrho}_{|b}}{\partial x^{\varrho}} - T^{\alpha}_{c} C^{c}_{ab} \right) \varepsilon^{b}, \tag{1}$$

где C^{c}_{ab} — структурные константы группы Ли

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + x^{\alpha}_{|a}(x)\varepsilon^{a}, \tag{2}$$

то есть $T^{\alpha}_{a}(x)$ образуют координатно-параметрическую тензорную плотность второго ранга;

б). $T^{\alpha}_{a}(x)$ удовлетворяют дифференциальным законам сохранения

$$\frac{\partial T^{\alpha}_{a}(x)}{\partial x^{\alpha}} = 0 \tag{3}$$

---

* Адрес: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Rzeszów, Polska.

в силу уравнений поля. (Греческие индексы принимают значения $0, 1, 2, \ldots, n$, латинские индексы a, b, c принимают значения $1, 2, \ldots, m$; под повторяющимися индексами подразумевается соответствующие суммирование.) При этом предполагается, что уравнения поля имеют вид

$$R_A\left(\psi_A \frac{\partial \varphi_A}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \varphi_A}{\partial x^0},\ A = 1, 2, \ldots, N, \tag{4}$$

$$H_B\left(\psi_A^{(0)}, \frac{\partial \varphi_A^{(0)}}{\partial x^i}\right) = 0,\ B = 1, 2, \ldots M,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где $\varphi_A^{(0)} = \varphi_A(x)|_{x^0=x^0_{(0)}}$, причем функции поля $\varphi_A(x)$ образуют геометрический обьект. Функциами состояния поля названо те из функций поля $\varphi_A(x)$ и их производных по координатам x^μ, произвольное задание которых в фиксированной точке $x^\mu_{(0)}$ совместно с уравнениями поля (4), (5). Функции состояния, образующие геометрические объекты а также геометрические комитанты этих геометрических объектов и координат, названо релятивистскими функциями состояния.

В цитированной работе также показано, что релятивистские функции состояния для уравнений поля (4), (5) являются геометрическими комитантами только функции поля $\varphi_A(x)$ и координат x^μ. Из определения данного условиями а) и б) выведено две системы уравнений с частными производными первого порядка для сохраняющихся токов, рассматриваемых как функции от φ_A и x^μ. Эти уравнения эквивалентны предположениям а) и б) и представляют необходимые и достаточные условия для того, чтобы величины T^α_a образовали сохраняющиеся токи. В частном случае группы Лоренца, если уравнения поля (4), (5) линейны и однородны

$$\sum_{A=1}^{N} M^\alpha_{AC}(\varphi)\frac{\partial \varphi_A}{\partial x^\alpha} = 0,\ C = 1, 2, \ldots, Q = M+N, \tag{6}$$

а функции поля преобразуются согласно закону

$$\varphi'_A = \varphi_A + \varphi_{A|\mu\nu}(\varphi)\varepsilon^{\mu\nu}, \tag{7}$$

определяющие уравнения сохраняющихся токов $T^{\alpha\varrho}$ и $T^{\alpha\varrho\sigma}$, соответсвующих параметрам ε^ϱ и $\varepsilon^{\varrho\sigma}$, то есть определяющие уравнения тензора энергии-инмульса и момента количества движения, имеют вид

$$\frac{\partial T^{\alpha\varrho}(\varphi, x)}{\partial x^\mu} = 0, \tag{8}$$

$$2\sum_{A=1}^{N}\frac{\partial T^{\alpha\varrho}(\varphi)}{\partial \varphi_A} = T^{\nu\varrho}(\varphi)\,\eta^{\alpha\mu} + T^{\alpha\nu}(\varphi)\,\eta^{\varrho\mu} - T^{\mu\varrho}(\varphi)\,\eta^{\alpha\nu} - T^{\alpha\mu}(\varphi)\,\eta^{\varrho\nu}, \tag{9}$$

$$T^{\alpha\varrho\sigma}(\varphi, x) = S^{\alpha\varrho\sigma}(\varphi) + T^{\alpha\varrho}(\varphi)x^\sigma - T^{\alpha\sigma}(\varphi)x^\varrho, \tag{10}$$

$$S^{\alpha\varrho\sigma}(\varphi) + S^{\alpha\sigma\varrho}(\varphi) = 0, \tag{11}$$

$$2\sum_{A=1}^{N}\frac{\partial S^{\alpha\varrho\sigma}(\varphi)}{\partial \varphi_A} = S^{\nu\varrho\sigma}(\varphi)\,\eta^{\alpha\mu} + S^{\alpha\nu\sigma}(\varphi)\,\eta^{\varrho\mu} + S^{\alpha\varrho\nu}(\varphi)\,\eta^{\sigma\mu} - S^{\mu\varrho\sigma}(\varphi)\,\eta^{\alpha\nu} - S^{\alpha\mu\sigma}(\varphi)\,\eta^{\varrho\nu} - S^{\alpha\varrho\mu}(\varphi)\,\eta^{\sigma\nu}, \tag{12}$$

$$T^{\alpha\varrho}(\varphi) - T^{\varrho\alpha}(\varphi) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial T^{\alpha\varrho}(\varphi)}{\partial \varphi_A} - \sum_{C=1}^{Q} \lambda^{C\varrho}(\varphi) M^{\alpha}_{AC}(\varphi) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial S^{\alpha\varrho\sigma}(\varphi)}{\partial \varphi_A} - \sum_{C=1}^{Q} \lambda^{C\varrho\sigma}(\varphi) M^{\alpha}_{AC}(\varphi) = 0, \tag{15}$$

где $\lambda^{C\varrho}(\varphi)$ и $\lambda^{C\varrho\sigma}(\varphi)$ — неопределенные множители. В формулах (8)—(15) подъем и снижение греческих индексов прои зводится при помощи величин $\eta^{\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}$, причем

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu \text{ и } \eta_{00} = \eta^{00} = 1, \ \eta_{11} = \eta^{11} = \ldots = \eta^{nn} = \eta_{nn} = -1.$$

В предполагаемой работе показывается, что в случае гидродинамического и электромагнитного поля тензоры энергии-импульса и момента количества движения определяются из условий а) и б) с точностью до двух постоянных. Доказательство этого утверждения проводится путем построения самого общего решения определяющих уравнений (8)—(15), написаных для гидродинамического и электромагнитного поля. Полученные тензоры энергии-импульса совпадают с общепринятыми метрическими тензорами энергии-импульса и дают нужную связь с соответствующими моментами количества движения.

2. *Тензор энергии-импульса и момент количества движения гидродинамического поля*

Уравнения гидродинамического поля могут быть написаны в виде

$$(1+P)\, u^{\alpha} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + (u^{\alpha} u^{\beta} - \eta^{\alpha\beta}) \frac{\partial P}{\partial x^{\alpha}} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial (\varrho u^{\alpha})}{\partial x^{\alpha}} = 0, \tag{17}$$

$$\eta_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = 1, \tag{18}$$

$$P = \int_0^p \frac{dp}{\varrho}, \tag{19}$$

$$p = p(\varrho), \tag{20}$$

где u^{α} — контравариантный вектор скорости среды ϱ, p и P — скаляры, характеризующие соответственно плотность, давление и динамическое давление среды ([2], Добавление B). Эти уравнения, очевидно, инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Уравнения (16)—(20) эквивалентны нормальной системе уравнений

$$\frac{\partial V^a}{\partial x^0} = -\frac{1-V^2}{1+P}(\delta^{ar}-\alpha V^a V^r)\frac{\partial P}{\partial x^r} - (V^r\delta^{as}-\beta V^a\delta^{rs})\frac{\partial V^s}{\partial x^r}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x^0} = -\alpha V^r\frac{\partial P}{\partial x^r} - \beta\,\frac{1+P}{1+V^2}\frac{\partial V^r}{\partial x^r}, \tag{22}$$

где

$$\alpha = \frac{1+P-\dfrac{dp}{d\varrho}}{1+P-V^2\dfrac{dp}{d\varrho}}, \qquad \beta = \frac{(1-V^2)\dfrac{dp}{d\varrho}}{1+P-V^2\dfrac{dp}{d\varrho}}. \tag{23}$$

(В формулах (21), (22) и следующих все латинские идексы принимают значения 1, 2, 3; под этими повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 1 до 3.) Таким образом, при помощи уравнений (21) и (22) гидродинамическое поле описывается функциями V^a и P. Первоначальные функции u^α, ϱ и p связаны с V^a и P формулами (19), (20) и соотношенями

$$u_0 = (1-V^2)^{-1/2}, \quad u^k = (-V^2)^{-1/2}\,V^k, \quad V^2 = \delta_{rs}V^rV^s. \tag{24}$$

Легко проверить, что функции V^a образуют геометрический объект с законом преобразования

$$V'^a = V^a + V^a_{|\varrho\sigma}\varepsilon^{\varrho\sigma}, \tag{25}$$

где

$$V_{a|\varrho\sigma} = \frac{1}{2}(\delta^a_\varrho\eta_{0\sigma}-\delta^a_\sigma\eta_{0\sigma}) + \frac{1}{2}V^m(\delta^a_\varrho\eta_{m\sigma}-\delta^a_\sigma\eta_{m\varrho}) -$$

$$-\frac{1}{2}V^a(\delta_{a\varrho}\eta_{0\sigma}-\delta_{a\sigma}\eta_{0\varrho}) - \frac{1}{2}V^aV^m(\delta_{0\varrho}\eta_{m\sigma}-\delta_{0\sigma}\eta_{m\varrho}). \tag{26}$$

Закон преобразования скаляра P имеет вид

$$P' = P + P_{|\varrho\sigma}\varepsilon^{\varrho\sigma}, \quad P_{|\varrho\sigma} = 0 \tag{27}$$

Согласно общему определению, релятивистскими функциями состояния гидродинамического поля являются геометрические объекты V^a и P.

Поскольку уравнения поля (21) и (22) линейны и однородны, а величины V^a и P преобразуются по формулам вида (7), что тензор энергии-импульса является симметричным и не зависит явным образом от координат

$$T^{\alpha\beta}(V, P) = T^{\beta\alpha}(V, P), \tag{28}$$

а связь момента количества движения с тензором энергии-импульса дается формулой

$$T^{\mu\alpha\beta}(x, V, P) = S^{\mu\alpha\beta}(V, P) + T^{\alpha\mu}(V, P)x^\beta - T^{\beta\mu}(V, P)x^\alpha. \tag{29}$$

Соответствующие, определяющие уравнения имеют вид

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial V^s} V^r - \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial V^r} V^s = T^{s\beta}\eta^{\alpha r} + T^{\alpha s}\eta^{\beta r} - T^{r\beta}\eta^{\alpha s} - T^{\alpha r}\eta^{\beta s}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial V^k} V^k V^r - \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial V^r} = T^{0\beta}\eta^{\alpha r} + T^{\alpha 0}\eta^{\beta r} - T^{r\beta}\eta^{\alpha 0} - T^{\alpha r}\eta^{\beta 0}, \tag{31}$$

$$S^{\mu\alpha\beta}(V, P) = -S^{\mu\beta\alpha}(V, P), \tag{32}$$

$$\frac{\partial S^{\mu\alpha\beta}}{\partial V^s} V^r - \frac{\partial S^{\mu\alpha\beta}}{\partial V^r} V^s = S^{s\alpha\beta}\eta^{\mu r} + S^{\mu s\beta}\eta^{\alpha r} + S^{\mu\alpha s}\eta^{\beta r} - S^{r\alpha\beta}\eta^{\mu s} - S^{\mu r\beta}\eta^{\alpha s} - S^{\mu\alpha r}\eta^{\beta s}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial S^{\mu\alpha\beta}}{\partial V^k} V^k V^r - \frac{\partial S^{\mu\alpha\beta}}{\partial V^r} = S^{0\alpha\beta}\eta^{\mu r} + S^{\mu 0\beta}\eta^{\alpha r} + S^{\mu\alpha 0}\eta^{\beta r} - S^{r\alpha\beta}\eta^{\mu 0} - S^{\mu r\beta}\eta^{\alpha 0} - S^{\mu\alpha r}\eta^{\beta 0}, \tag{34}$$

где $V \equiv (V^1, V^2, V^3)$.

Найдем сперва общее решение уравнений (30) и (31). Рассписывая эти уравнения, получаем

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial V^r} V^s - \frac{\partial T^{00}}{\partial V^s} V^r = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial V^r} - \frac{\partial T^{00}}{\partial V^k} V^k V^r = 2T^{0r}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial T^{0m}}{\partial V^r} - \frac{\partial T^{0m}}{\partial V^k} V^k V^r = T^{00}\delta^{mr} + T^{mr}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial T^{mn}}{\partial V^r} - \frac{\partial T^{mn}}{\partial V^k} V^k V^r = T^{0m}\delta^{nr} + T^{0n}\delta^{mr}, \tag{38}$$

$$\frac{\partial T^{m0}}{\partial V^r} V^s - \frac{\partial T^{m0}}{\partial V^s} V^r = T^{r0}\delta^{ms} - T^{s0}\delta^{mr}, \tag{39}$$

$$\frac{\partial T^{mn}}{\partial V^s} V^r - \frac{\partial T^{mn}}{\partial V^r} V^s = T^{sn}\delta^{mr} + T^{ms}\delta^{nr} - T^{rn}\delta^{ms} - T^{mr}\delta^{ns}. \tag{40}$$

Из уравнений (35) следует, что T^{00} является функцией V^2 и P. Таким образом, можно написать

$$T^{00} = \alpha(R, P) \cdot R, \tag{41}$$

где

$$R = (1 - V^2)^{-1}. \tag{42}$$

Подстановка (41) в (46) дает

$$T^{0n} = \beta V^n, \tag{43}$$

где

$$\beta = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial R} R + \alpha\right). \tag{44}$$

Из уравнений (37), (41) и (43) следует

$$T^{mn} = \gamma V^m V^n + \delta \delta^{mn}, \tag{45}$$

где

$$\gamma = 2 \frac{\partial \beta}{\partial R} R - \beta, \qquad \delta = \beta - \alpha R. \tag{46}$$

Из уравнений (43), (45) и (38) получаем

$$V^n \delta^{mr}(\gamma - \beta) + V^m \delta^{nr}(\gamma - \beta) + 2V^r \delta^{mn} \frac{\partial \delta}{\partial R} R + 2V^r V^m V^n \left(\frac{\partial \gamma}{\partial R} R - \gamma \right) = 0. \tag{47}$$

Последние уравнения дают

$$\beta = \gamma, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial R} = 0, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial R} R - \gamma = 0. \tag{48}$$

Учитывая (44) и (46), получаем общее решение уравнений (48) в виде

$$\alpha = B \frac{1}{R} + A, \tag{49}$$

$$\beta = AR, \qquad \delta = -B, \qquad \gamma = AR, \tag{50}$$

где A и B произвольные функции P. Таким образом, окончательно имеем

$$T^{00} = AR + B$$

$$T^{0n} = ARV^n$$

$$T^{mn} = ARV^m V^n - B\delta^{mn}. \tag{51}$$

Легко проверить, что функции (51) удовлетворяют и остальным уравнениям (35)—(40). Используя обозначения (24), функции (51) можем написать в виде

$$T^{\alpha\beta} = A(P) u^\alpha u^\beta + B(P) \eta^{\alpha\beta}. \tag{52}$$

Это и есть общее решение определяющих уравнений (30), (31).

Найдем теперь общее решение определяющих уравнений (33) и (34). Расписывая эти уравнения получаем

$$\frac{\partial S^{00b}}{\partial V^s} V^r - \frac{\partial S^{00b}}{\partial V^r} V^s = S^{00r} \delta^{bs} - S^{00s} \delta^{br}, \tag{53}$$

$$\frac{\partial S^{0ab}}{\partial V^s} V^r - \frac{\partial S^{0ab}}{\partial V^r} V^s = S^{0rb} \delta^{as} + S^{0ar} \delta^{bs} - S^{0sb} \delta^{ar} - S^{0as} \delta^{br}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial S^{m0b}}{\partial V^s} V^r - \frac{\partial S^{m0b}}{\partial V^r} V^s = S^{r0b} \delta^{ms} + S^{m0r} \delta^{bs} - S^{s0b} \delta^{mr} - S^{m0s} \delta^{br}, \tag{55}$$

$$\frac{\partial S^{mab}}{\partial V^s} V^r - \frac{\partial S^{mab}}{\partial V^r} V^s = S^{rab} \delta^{ms} + S^{mrb} \delta^{as} + S^{mar} \delta^{bs} - S^{sab} \delta^{mr} - S^{msb} \delta^{ar} - S^{mas} \delta^{br}, \tag{56}$$

$$\frac{\partial S^{00b}}{\partial V^k} V^k V^r - \frac{\partial S^{00b}}{\partial V^r} = -S^{r0b} - S^{0rb}, \tag{57}$$

$$\frac{\partial S^{0ab}}{\partial V^k} V^k V^r - \frac{\partial S^{0ab}}{\partial V^r} = -S^{rab} - S^{00b}\delta^{ar} - S^{00a}\delta^{br}, \tag{58}$$

$$\frac{\partial S^{m0b}}{\partial V^k} V^k V^r - \frac{\partial S^{m0b}}{\partial V^r} = -S^{00b}\delta^{mr} - S^{mrb}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial S^{mab}}{\partial V^k} V^k V^r - \frac{\partial S^{mab}}{\partial V^r} = - S^{0ab}\delta^{mr} - S^{m0b}\,\delta^{ar} - S^{m0a}\,\delta^{br}. \tag{60}$$

Уравнения (53) для ($b \neq s$ и $b \neq r$) дают

$$\frac{\partial S^{00b}}{\partial V^s} V^r - \frac{\partial S^{00b}}{\partial V^r} V^s = 0. \tag{61}$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$S^{001} = \alpha^1(V^1, R_{23}, P), \quad S^{002} = \alpha^2(V^2, R_{13}, P), \quad S^{003} = \alpha^3(V^3, R_{12}, P), \tag{62}$$

где

$$R_{23} = (V^2)^2+(V^3)^2, \quad R_{13} = (V^1)^2+(V^3)^2, \quad R_{12} = (V^1)^2+(V^2)^2. \tag{63}$$

Для ($b = s \neq r$) уравнения (53) дают

$$\alpha^1 V^2 = \alpha^2 V^1, \quad \alpha^2 V^3 = \alpha^3 V^2, \quad \alpha^3 V^1 = \alpha^2 V^3. \tag{64}$$

Из последних уравнений следует

$$\alpha^1(V^1, R_{23}, P) = \alpha(R, P)V^1, \quad \alpha^2(V^2, R_{13}, P) = \alpha(R, P)V^2,$$

$$\alpha^3(V^3, R_{12}, P) = \alpha(R, P)V^2. \tag{65}$$

Таким образом, общее решение уравнений (53) имеет вид

$$S^{00b} = \alpha(R, P)V^b. \tag{66}$$

Уравнения (54) для ($a = s, b = r, a \neq r, b \neq s$) дают

$$\frac{\partial S^{0ab}}{\partial V^s} V^r - \frac{\partial S^{0ab}}{\partial V^r} V^s = 0. \tag{67}$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$S^{012} = \beta^{12}(V^3, R_{12}, P), \quad S^{013} = \beta^{13}(V^2, R_{13}, P), \quad S^{023} = \beta^{23}(V^1, R_{23}, P). \tag{68}$$

Для ($a = s, b \neq r, a \neq r, b \neq s$) уравнения (54) дают

$$\beta^{23}V^2 = -\beta^{13}V^1, \quad \beta^{23}V^3 = \beta^{12}V^1, \quad \beta^{13}V^3 = -\beta^{12}V^2. \tag{69}$$

Из этих уравнений следует

$$\beta^{12}(V^3, R_{12}, P) = \beta(R, P)V^3, \quad \beta^{13}(V^2, R_{13}, P) = \beta(R, P)V^2,$$

$$\beta^{23}(V^1, R_{23}, P) = (R, P)V^1. \tag{70}$$

Таким образом, общее решение уравнений (54) имеет вид

$$S^{0ab} = \beta(R, P)\varepsilon_{abc}V^c, \tag{71}$$

где ε_{abc} — вполне антисимметричный псевдотензор. Учитывая (66) и (71) из уравнений (57) получаем

$$S^{mob} = \gamma V^m V^b + \alpha\delta^{mb} - \beta\varepsilon^{mbc}V^c, \tag{72}$$

где

$$\gamma = 2R\,\frac{\partial\alpha}{\partial R} - \alpha. \tag{73}$$

Симметричная в индексах r, b часть уравнений (59) дает

$$4\left(R\,\frac{\partial\gamma}{\partial R} - \gamma\right)V^mV^rV^b + 2\gamma\,(V^m\delta^{br} + V^r\delta^{mb} + V^b\delta^{mr}) -$$

$$-\left(2R\,\frac{\partial\beta}{\partial R} - \beta\right)(\varepsilon^{mbc}\,V^cV^r + \varepsilon^{mrc}\,V^cV^b) = 0. \tag{74}$$

Из этих уравнений следует

$$\gamma = 0,\ 2R\,\frac{\partial\beta}{\partial R} - \beta = 0. \tag{75}$$

Антисимметричная в индексах r, b часть уравнений (59) дает

$$S^{mrb} = \beta\varepsilon^{mrb}. \tag{76}$$

Подставляя (66), (72) и (76) в (58), получаем

$$\alpha(\delta^{br}V^a - \delta^{ar}V^b) = 0 \tag{77}$$

или

$$\alpha = 0. \tag{78}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$S^{00b} = 0, \tag{79}$$

$$S^{0ab} = \beta\varepsilon^{abc}V^c, \tag{80}$$

$$S^{mob} = -\beta\varepsilon^{mbc}V^c, \tag{81}$$

$$S^{mab} = \beta\varepsilon^{mab}, \tag{82}$$

где $\beta(R, P)$ удовлетворяет уравнению

$$2R\,\frac{\partial\beta}{\partial R}-\beta=0. \tag{83}$$

Общее решение уравнения (83) имеет вид

$$\beta = C\cdot R \tag{84}$$

где $C(P)$ — произвольная функция P. Легко проверить, что функции (79)—(82) при условии (84) удовлетворяют и остальным уравнениям (53)—(60). Вводя обозначения (24), общее решение уравнений (79)—(82) можем написать в виде

$$S^{\mu\alpha\beta}=C(P)\,\eta_{\varrho\sigma}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\varrho}u^{\sigma}, \tag{85}$$

где $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\varrho}$ — вполне антисимметричный псевдотензор.

Дальнейшее определение функции $A(P)$, $B(P)$ и $C(P)$ получим из уравнений, которые следуют из законов сохранения

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}(P,V)}{\partial P}\,\frac{\partial P}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial T^{\alpha\beta}(P,V)}{\partial V^{b}}\,\frac{\partial V^{b}}{\partial x^{\alpha}}=0, \tag{86}$$

$$\frac{\partial S^{\alpha\mu\nu}(P,V)}{\partial P}\,\frac{\partial P}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial S^{\alpha\mu\nu}(P,V)}{\partial V^{b}}\,\frac{\partial V^{b}}{\partial x^{\alpha}}=0. \tag{87}$$

Уравнения (86) для $\beta=0$ дают

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial P}\,\frac{\partial P}{\partial x^{0}}+\frac{\partial T^{r0}}{\partial P}\,\frac{\partial P}{\partial x^{r}}+\frac{\partial T^{00}}{\partial V^{b}}\,\frac{\partial V^{b}}{\partial x^{0}}+\frac{\partial T^{r0}}{\partial V^{b}}\,\frac{\partial V^{b}}{\partial x^{r}}=0. \tag{88}$$

Из (21), (22) и (88) получаем

$$\left[\frac{\partial T^{r0}}{\partial P}-\alpha\,\frac{\partial T^{00}}{\partial P}\,V^{r}-\frac{1-V^{2}}{1+P}\,(\delta^{br}-\alpha V^{b}V^{r})\,\frac{\partial T^{00}}{\partial V^{r}}\right]\frac{\partial P}{\partial x^{r}}+$$
$$+\left[\frac{\partial T^{r0}}{\partial V^{s}}-\beta\,\frac{1+P}{1-V^{2}}\,\frac{\partial T^{00}}{\partial P}\,\delta^{rs}-(V^{s}\delta^{br}-\beta V^{b}\delta^{rs})\,\frac{\partial T^{00}}{\partial V^{b}}\right]\frac{\partial V^{r}}{\partial V^{s}}=0. \tag{89}$$

Из последних уравнений следует

$$\frac{\partial T^{r0}}{\partial P}-\alpha\,\frac{\partial T^{00}}{\partial R}\,V^{r}-\frac{1-V^{2}}{1+P}\,(\delta^{br}-\alpha V^{b}V^{r})\,\frac{\partial T^{00}}{\partial V^{b}}=0, \tag{90}$$

$$\frac{\partial T^{r0}}{\partial V^{s}}-\beta\,\frac{1+P}{1-V^{2}}\,\frac{\partial T^{00}}{\partial P}\,\delta^{rs}-(V^{s}\delta^{br}-\beta V^{b}\delta^{rs})\,\frac{\partial T^{00}}{\partial P}=0. \tag{91}$$

Подстановка (51) в (90) и (91) дает

$$\frac{dp}{d\varrho}\,\frac{\partial A}{\partial P}-\left(1+P-\frac{dp}{d\varrho}\right)\frac{\partial B}{\partial P}-2A=0, \tag{92}$$

$$(1+P)\,\frac{dp}{d\varrho}\,\frac{\partial A}{\partial P}+(1+P)\,(1-V^{2})\,\frac{dp}{d\varrho}\,\frac{\partial B}{\partial P}-\left(1+P+V^{2}\,\frac{dp}{d\varrho}\right)A=0. \tag{93}$$

Умножая (92) на $(1+P)$ и вычитывая из (93), получаем

$$A+(1+P)\frac{\partial B}{\partial P}=0. \tag{94}$$

Подстановка (94) в (92) дает

$$\frac{dp}{d\varrho}\frac{\partial A}{\partial P}+\frac{dp}{d\varrho}\frac{\partial B}{\partial P}-A=0. \tag{95}$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dP}=\varrho\frac{d\varrho}{dp}\frac{d}{d\varrho}, \tag{96}$$

уравнение (95) можем также написать в виде

$$\varrho\frac{dA}{d\varrho}+\varrho\frac{dB}{d\varrho}-A=0. \tag{97}$$

Уравнения (94) и (97) совпадают с уравнениями полученными Фоком ([2] Добавление B). Общее решение этих уравнений имеет вид

$$A=\alpha\varrho(1+P), \qquad B=-\alpha p+\lambda \tag{98}$$

где α и λ — постоянные.

Уравнения (87) для $(\alpha=0, \mu=0, \nu=b)$ дают

$$\frac{\partial S^{00b}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial x^0}+\frac{\partial S^{rob}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V^r}+\frac{\partial S^{oob}}{\partial V^a}\frac{\partial V^a}{\partial x^0}+\frac{\partial S^{rob}}{\partial V^a}\frac{\partial V^a}{\partial x^r}=0. \tag{99}$$

Из (21), (22) и (98), получаем

$$\left[\frac{\partial S^{rob}}{\partial P}-\alpha\frac{\partial S^{oob}}{\partial P}V^r+\frac{1-V^2}{1+P}(\delta^{kr}-\alpha V^kV^r)\frac{\partial S^{oob}}{\partial V^k}\right]\frac{\partial P}{\partial x^r}+$$

$$+\left[\frac{\partial S^{sob}}{\partial V^r}-\frac{1+P}{1-V^2}\frac{\partial S^{oob}}{\partial P}\delta^{sr}-(V^s\delta^{rk}-\beta V^k\delta^{rs})\frac{\partial S^{sob}}{\partial V^k}\right]\frac{\partial V^r}{\partial x^s}=0. \tag{100}$$

Из последних уравнений следует

$$\frac{\partial S^{rob}}{\partial P}-\alpha\frac{\partial S^{oob}}{\partial P}V^r+\frac{1-V^2}{1+P}(\delta^{kr}-\alpha V^kV^r)\frac{\partial S^{oob}}{\partial V^k}=0, \tag{101}$$

$$\frac{\partial S^{sob}}{\partial V^r}-\frac{1+P}{1-V^2}\frac{\partial S^{oob}}{\partial P}\delta^{sr}-(V^s\delta^{rk}-\beta V^k\delta^{rs})\frac{\partial S^{sob}}{\partial V^k}=0. \tag{102}$$

Подстановка (75)—(82) и (84) в (101) и (102) дает

$$\frac{\partial C}{\partial P}=0, \qquad C=0. \tag{103}$$

Отсюда следует, что

$$S^{\alpha\mu\nu}=0. \tag{104}$$

Таким образом, окончательно получаем тензор энергии-импульса и тензор момента количества движения гидродинамического поля в виде

$$T^{\alpha\beta}=\alpha[\varrho(1+P)u^{\alpha}u^{\beta}-p\,\eta^{\alpha\beta}]+\lambda\,\eta^{\alpha\beta}, \tag{105}$$

$$T^{\mu\alpha\beta}=T^{\mu\alpha}x^{\beta}-T^{\mu\beta}x^{\alpha}, \tag{106}$$

где α и λ — постоянные.

3. *Тензор энергии-импульса и момент количества движения электромагнитного поля*

Уравнения электромагнитного поля имеют вид

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial f_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}}=0, \tag{107}$$

$$\eta^{\alpha\beta}\,\frac{\partial f_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}=0, \tag{108}$$

$$f_{\alpha\beta}=-f_{\beta\alpha}, \tag{109}$$

где $f_{\alpha\beta}$ — тензор напряженности поля. Вводя напряженность электрического и магнитного поля

$$E_{ao}=f_{ao}\qquad H_a=\frac{1}{2}\,\varepsilon_{abc}f_{bc} \tag{110}$$

уравнения (107)—(109) можем написать в эквивалентном виде

$$\frac{\partial E_a}{\partial x^0}=\varepsilon_{abc}\,\frac{\partial H_c}{\partial x^b}, \tag{111}$$

$$\frac{\partial H_a}{\partial x^0}=-\,\varepsilon_{abc}\,\frac{\partial E_c}{\partial x^b}, \tag{112}$$

$$\frac{\partial E_a^{(0)}}{\partial x^a}=0,\qquad \frac{\partial H_a^{(0)}}{\partial x^a}=0, \tag{113}$$

где $E_a^{(0)}=E_a(x)|_{x^0=x^0_{(0)}}$, $H_a^{(0)}=H_a(x)|_{x^0=x^0_{(0)}}$. Согласно общему определению релятивистскими функциями состояния являются величины E_a и H_a.

Законы преобразования E_a и H_a имеют вид

$$E'_a=E_a+\frac{1}{2}\,E_{a|\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}, \tag{114}$$

$$H'_a=H_a+\frac{1}{2}\,H_{a|\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu}, \tag{115}$$

где

$$E_{a|\mu\nu} = -\varepsilon_{akr} H_k(\delta_{r\nu}\eta_{\mu 0} - \delta_{r\mu}\eta_{\nu 0}) + E_r(\delta_{\nu r}\eta_{\mu a} - \delta_{\mu r}\eta_{\nu a}), \tag{116}$$

$$H_{a|\mu\nu} = -\varepsilon_{akr} E_k(\delta_{r\nu}\eta_{\mu 0} - \delta_{r\mu}\eta_{\nu 0}) - H_r(\delta_{\nu r}\eta_{\mu a} - \delta_{\mu r}\eta_{\nu a}). \tag{117}$$

Поскольку уравнения поля линейны и однородны, то тензор энергии-импульса симметричен и не зависит явным образом от координат

$$T^{\alpha\varrho}(E, H) = T^{\varrho\alpha}(E, H) \tag{118}$$

а момент количества движения выражается формулой

$$T^{\alpha\varrho\sigma}(E, H, x) = S^{\alpha\varrho\sigma}(E, H) + T^{\alpha\varrho}(E, H)x^{\sigma} - T^{\alpha\sigma}(E, H)x^{\varrho}, \qquad S^{\alpha\varrho\sigma} + S^{\alpha\sigma\varrho} = 0. \tag{119}$$

Соответствующие определяющие уравнения имеют вид

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial H_m} H_n - \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial E_m} E_n - \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial E_n} E_m - \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial H_n} H_m = T^{m\beta}\eta^{\alpha n} + T^{\alpha m}\eta^{\beta n} - T^{n\beta}\eta^{\alpha m} - T^{\alpha n}\eta^{\beta m}, \tag{120}$$

$$\varepsilon_{mpg}\left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial E_g} H_p - \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial H_g} E_p\right) = T^{0\beta}\eta^{\alpha m} + T^{\alpha 0}\eta^{\beta m} - T^{m\beta}\eta^{\alpha 0} - T^{\alpha m}\eta^{\beta 0}, \tag{121}$$

$$\frac{\partial S^{\varrho\alpha\beta}}{\partial H_m} H_n + \frac{\partial S^{\varrho\alpha\beta}}{\partial E_m} E_n - \frac{\partial S^{\varrho\alpha\beta}}{\partial E_n} E_m - \frac{\partial S^{\varrho\alpha\beta}}{\partial H_n} H_m = S^{m\alpha\beta}\eta^{\varrho n} + S^{\varrho m\beta}\eta^{\alpha n} + S^{\varrho\alpha m}\eta^{\beta n} -$$

$$- S^{n\alpha\beta}\eta^{\varrho m} - S^{\varrho n\beta}\eta^{\alpha m} - S^{\varrho\alpha n}\eta^{\beta m}, \tag{122}$$

$$\varepsilon_{mpg}\left(\frac{\partial S^{\varrho\alpha\beta}}{\partial E_g} H_p - \frac{\partial S^{\varrho\alpha\beta}}{\partial H_g} E_p\right) = S^{0\alpha\beta}\eta^{\varrho m} + S^{\varrho 0\beta}\eta^{\alpha m} + S^{\varrho\alpha 0}\eta^{\beta m} - S^{m\alpha\beta}\eta^{\varrho 0} - S^{\varrho m\beta}\eta^{\alpha 0} - S^{\varrho\alpha m}\eta^{\beta 0}. \tag{123}$$

Структура уравнений (120), (121) и (122), (123) подобна соответственно структуре уравнений (30), (31), и (33), (34). Так что они решаются подобным образом. Общее решение этих уравнений имеет вид

$$T^{00} = \frac{1}{2}\alpha(\xi, \eta)(E^2 + H^2) + \lambda(\xi, \eta),$$

$$T^{0b} = \alpha(\xi, \eta)\varepsilon_{bks}E_k H_s,$$

$$T^{ab} = \alpha(\xi, \eta)\left[\frac{1}{2}(E^2 + H^2)\delta_{ab} - (E_a E_b + H_a H_b)\right] - \lambda(\xi, \eta), \tag{124}$$

$$S^{\varrho\alpha\beta} = 0, \tag{125}$$

где α и λ — произвольные функции от ξ и η, причем

$$\xi = \frac{1}{2}(E^2 + H^2), \quad \eta = E_k H_k. \tag{126}$$

Функции α и λ определяем из второй группы уравнений, следующих из законов сохранения. Соответствующие вычисления, аналогичные определению функции $A(P)$, $B(P)$ и $C(P)$ для гидродинамического поля, дают

$$\alpha = \text{const}, \ \lambda = \text{const}. \tag{127}$$

Учитывая (110), получаем окончательно тензор энергии-импульса и момент количества движения электромагнитного поля в виде

$$T^{\alpha\beta} = \alpha \left(\eta_{\mu\nu} f^{\alpha\mu} f^{\beta\nu} - \frac{1}{4}\, \eta^{\alpha\beta} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \right) + \lambda \eta^{\alpha\beta}, \tag{128}$$

$$M^{\varrho\alpha\beta} = T^{\varrho\alpha} x^\beta - T^{\varrho\beta} x^\alpha, \tag{129}$$

где α и λ — постоянные.

Автор выражает благодарность Академику В. А. Фоку и Профессору А. Траутману за ценные замечания, относящиеся к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ч. Янкевич, *Acta Phys. Polon.*, **36**, 1 (1969).
[2] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Издание второе, Москва 1961 г.